ВѢСТНИКЪ МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

№ 7 и 8.

I.

Общая теорiя относительнаго движенiя.

ВВЕДЕНIЕ.

Опытъ Фуко надъ отклоненiемъ плоскости качанiй маятника, такъ наглядно доказывающiй вращательное движенiе земли около ея оси, обратилъ вниманiе современныхъ геометровъ на полнѣйшее изслѣдованiе вопроса: опредѣлить движенiе системы матерiальныхъ точекъ относительно осей, перемѣщающихся въ пространствѣ, когда извѣстны силы, дѣйствующiя на матерiальныя точки системы, и условiя ея возможныхъ перемѣщенiй.

Еще Клеро старался рѣшить вопросъ о движенiи матерiальной точки по плоскости, движущейся по другой плоскости; но сдѣлалъ въ своемъ общемъ разсужденiи ошибку, которая въ недавнее время была исправлена Бертраномъ. (Note sur la théorie des mouvements relatifs, Journal de l' Ecole Polyt. T. XIX.) Лапласъ (Mécanique céleste, T. IV) и Пуассонъ (Mémoire sur le mouvement des Projectiles dans l'air, en ayant égard à la rotation de la Terre, Journal de l'Ecole Polyt., T. XVI) составили уравненiя относительнаго движенiя, но только для частнаго случая, для движенiя падающихъ и брошенныхъ тѣлъ относительно осей, неизмѣняемо-соединенныхъ съ землею и слѣдовательно обращающихся вмѣстѣ съ нею. Корiолисъ въ двухъ своихъ мемуарахъ (Coriolis, Journal de l' Ecole Polyt, Cahiers XXI et XXIV.) и въ своемъ извѣстномъ сочиненiи о твердыхъ тѣлахъ и о работѣ машинъ (Traité de la Mécanique des corps solides et du calcul de l' effet des machines.) первый далъ общiя уравненiя относительнаго движенiя системы матерiальныхъ точекъ.

Опытъ Фуко надъ отклоненiемъ плоскости качанiй маятника, какъ я сказалъ, вызвалъ геометровъ на подробнѣйшее изложенiе теорiи относительнаго движенiя и ея приложенiй. Бине, (Comptes rendus des séances de l' Academie des sciences, T. XXXII, 1851.) воспользовавшись Пуассоновыми уравненiями движенiя твердаго тѣла относительно осей, обращающихся вмѣстѣ съ землею около ея оси, далъ теорiю опыта Фуко. Ке, (Quet, Des mouvements relatifs en général, et spécialement des mouvements relatifs sur la terre; Journal de Mathématiques publié par Liouville. 1853.) изложивъ общую теорiю относительнаго движенiя, данную Корiолисомъ, сдѣлалъ прекрасныя приложенiя этой теорiи, разсматривая движенiе въ отношенiи осей координатъ, неизмѣняемо-соединенныхъ съ землею и слѣд. обращающихся вмѣстѣ съ нею около ея оси.

Какъ извѣстно, Лагранжъ, совокупивъ начало возможныхъ перемѣщенiй Бернулли съ началомъ потерянныхъ силъ д' Аламберта, далъ общiй прiемъ для рѣшенiя вопросовъ о движенiи системы матерiальныхъ точекъ: рѣшенiя всѣхъ вопросовъ механики, по прiему Лагранжа, вытекаютъ изъ одной общей формулы, и болѣе или менѣе удачное рѣшенiе сихъ вопросовъ зависитъ отъ большаго или меньшаго развитiя прiемовъ чистаго анализа; но общая формула Лагранжа не безупречна. Уже Фурье показалъ неточность основанiя, на которомъ построена формула Лагранжа.—Лагранжъ думалъ, что для равновѣсiя необходимо и достаточно, чтобы полный моментъ силъ относительно возможныхъ перемѣщенiй былъ равенъ нулю; между тѣмъ какъ для равновѣсiя необходимо и достаточно только, чтобы полный моментъ не прiобрѣлъ положительной величины относительно возможныхъ перемѣщенiй системы. Остроградскiй, принявъ въ основанiе это положенiе, далъ строгое и ясное доказательство общаго прiема для составленiя уравненiй движенiя системы матерiальныхъ точекъ, подверженныхъ условiямъ, измѣняющимся со временемъ, и такимъ образомъ рѣшилъ вопросъ, передъ рѣшенiемъ котораго, надобно сознаться, труды первостепенныхъ математиковъ были

не вполнѣ удовлетворительны. Къ сожалѣнію только мысли Остроградскаго остались какъ-бы неизвѣстными иностраннымъ писателямъ, и мнѣ до сихъ поръ не случалось читать ни одного иностраннаго мемуара, въ которомъ-бы была принята въ основаніе теорія Остроградскаго. Коріолисъ и Ke написали свои мемуары объ относительномъ движеніи, принявъ въ основаніе теорію Лагранжа, основанную на положеніи, что полный возможный моментъ потерянныхъ при дѣйствительномъ перемѣщеніи силъ равенъ нулю, и что притомъ условія системы не зависятъ отъ времени; но первое предположеніе неточно, какъ показалъ Остроградскій; переходъ же отъ уравненій движенія относительно неподвижныхъ осей системы матеріальныхъ точекъ, подверженныхъ условіямъ, неизмѣняющимся со временемъ, къ уравненіямъ движенія относительно перемѣщающихся осей той-же системы матеріальныхъ точекъ, подверженныхъ условіямъ неизмѣняющимся со временемъ и относительно перемѣщающихся осей, не удовлетворяетъ математической точности; ибо если условія системы не измѣняются со временемъ относительно осей неподвижныхъ, то сіи условія будутъ зависѣть отъ времени относительно осей, перемѣщающихся въ пространствѣ, и обратно. Положивъ въ основаніе теоріи относительнаго движенія идеи Фурье и Остроградскаго, я стремился вывести уравненія относительнаго движенія системы матеріальныхъ точекъ, подверженной условіямъ измѣняющимся со временемъ, болѣе строгимъ и болѣе общимъ пріемомъ. Вотъ краткое содержаніе моего разсужденія:

Я началъ его аналитическимъ выраженіемъ условій дѣйствительнаго перемѣщенія системы матеріальныхъ точекъ, предполагая данными условія ея возможныхъ перемѣщеній и силы на нее дѣйствующія. Предположивъ потомъ одни оси координатъ перемѣщающимися въ пространствѣ относительно другихъ неподвижныхъ, я показалъ, что всякое перемѣщеніе матеріальной точки системы можетъ быть разсматриваемо состоящимъ изъ перемѣщенія системы, совокупнаго съ перемѣщеніемъ подвижныхъ осей, и слѣд. общаго всѣмъ точкамъ системы, и изъ перемѣщенія относительно подвижныхъ осей,—и что перемѣщеніе, общее всѣмъ точкамъ системы можетъ быть разсматриваемо состоящимъ изъ перемѣщенія переноснаго и изъ перемѣщенія вращательнаго около мгновенной оси, проходящей чрезъ начало подвижныхъ осей координатъ. Потомъ я перехожу къ выраженію силъ инерціи, развивающихся при дѣйствительномъ перемѣщеніи системы, и выраженіямъ сихъ силъ инерціи даю динамическое значеніе, соотвѣтственное перемѣщеніямъ системы. Послѣ этого я снова приступаю къ условіямъ дѣйствительнаго перемѣщенія системы, и нахожу, что уравненіе, выражающее условіе дѣйствительнаго перемѣщенія: потерянныя силы не стремятся произвести возможныхъ перемѣщеній,—разлагается на уравненія, выражающія условіе, что потерянныя силы не стремятся произвести движенія системы относительно перемѣщающихся осей, и на уравненія, выражающія, что потерянныя силы не стремятся произвести поступательнаго и вращательнаго движенія системы, общаго всѣмъ ея точкамъ; но сейчасъже замѣчаю, что вторыя уравненія суть необходимое слѣдствіе первыхъ уравненій. Первыя уравненія опредѣляютъ движеніе системы мат. точекъ относительно подвижныхъ осей, когда дано движеніе сихъ послѣднихъ; вторыя уравненія опредѣляютъ общее движеніе системы мат. точекъ, когда дано относительное движеніе системы. Объяснивъ условія, при которыхъ уравненія относительнаго движенія справедливы, я перехожу къ уравненіямъ, выражающимъ, что потерянныя силы не стремятся произвести поступательнаго и вращательнаго движенія системы, и показываю, что сіи уравненія выражаютъ теоремы, относительно которыхъ извѣстныя теоремы о движеніи центра тяжести и пропорціональности времени площадей, описываемыхъ радіусами - векторами суть только частные случаи. Выведши наконецъ уравненіе живыхъ силъ для относительнаго движенія, я прилагаю его къ опредѣленію работы машинъ, разсматривая сію работу, какъ работу давленій, оказываемыхъ на перемѣщающіяся поверхности пріемника частицами матеріальныхъ точекъ системы, принятой средою для развитія работы силъ и для преобразованія этой работы при помощи машины въ работу полезнаго сопротивленія, и опредѣляю работу абсолютную, въ отношеніи неподвижныхъ осей, и работу относительную, въ отношеніи подвижныхъ осей координатъ.

Изъ сущности предъидущаго видно, что приложенія общей теоріи относительнаго движенія распадаются на три отдѣла: на опредѣленіе движенія системы матер точекъ въ отношеніи подвижныхъ осей, когда движеніе сихъ осей извѣстно; на опредѣленіе движенія подвижныхъ осей, когда извѣстно движеніе системы мат. точекъ относительно сихъ осей, и на приложенія къ теоріи работы машинъ. Для перваго приложенія я избралъ движеніе системы мат. точекъ въ отношеніи осей, неизмѣняемо соединенныхъ съ землею и слѣд. обращающихся вмѣстѣ съ нею около ея оси; я изложилъ теорію движенія брошеннаго тѣла, теорію отклоненія плоскости качаній простаго маятника, теорію жироскопа и др. Вопросъ о движеніи маятника въ отношеніи осей, неизмѣняемо соединенныхъ съ землею, приводится къ вопросу о движеніи маятника въ отношеніи осей неподвижныхъ, къ вопросу, который рѣшенъ Тиссо и для рѣшенія котораго Тиссо нашелъ данныя у Якоби преимущественно въ его знаменитомъ мемуарѣ о движеніи твердаго тѣла. Перейдя потомъ къ опредѣленію положенія перемѣщающихся осей, когда извѣстно относительное движеніе системы матеріальныхъ точекъ и силы, на нее дѣйствующія, я показываю, что въ семъ случаѣ вопросъ можетъ быть опредѣленнымъ, неопредѣленнымъ и условнымъ; замѣтивъ потомъ, что движеніе неизмѣняемой системы относительно движущихся осей приводится къ шести уравненіямъ между координатами и искомыми уравненіями, и что слѣдовательно относительное движеніе неизмѣняемой системы при дѣйствіи данныхъ силъ безусловно опредѣляетъ движеніе осей координатъ, я перехожу къ опредѣленію движенія перемѣщающихся осей въ предположеніи, что при дѣйствіи данныхъ силъ неизмѣняемая система не перемѣняетъ своего положенія относительно подвижныхъ осей и что главныя оси неизмѣняемой системы совпадаютъ съ подвижными ося-

ми. Для приложенія общей теоріи относительнаго движенія къ практической механикѣ я избралъ теорію тюрбинъ и вентиляторовъ.

Слѣдующая за симъ статья разсматриваетъ относительное движеніе только въ общихъ формулахъ; остальныя три статьи будутъ напечатаны впослѣдствіи.

---

1. Вообразимъ себѣ двѣ системы прямоугольныхъ осей координатъ—одну неподвижную въ пространствѣ, другую перемѣщающуюся какимъ-ни-будь образомъ относительно неподвижныхъ осей, и постараемся найти уравненія движенія системы матеріальныхъ точекъ относительно перемѣщающихся осей, когда даны силы, дѣйствующія на матеріальныя точки системы и условія ея возможныхъ перемѣщеній.

Пусть дана система матеріальныхъ точекъ $m, m' \ldots$, которыхъ координаты относительно неподвижныхъ осей соотвѣтственно суть $x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1 \ldots$ Пусть тѣ изъ перемѣщеній $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1, \Delta x'_1, \Delta y'_1, \Delta z'_1 \ldots$ возможны для разсматриваемой системы, которыя дѣлаютъ линейными относительно перемѣщеній функціи:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cos(A_1, x_1).\, \Delta x_1 + a_1. \cos(A_1, y_1).\, \Delta y_1 + a_1. \cos(A_1, z_1).\, \Delta z_1 + a'_1. \cos(A'_1, x_1).\, \Delta x'_1 + \ldots + T_1.\, \partial t \\ a_2 \cos(A_2, x_1).\, \Delta x_1 + a_2. \cos(A_2, y_1).\, \Delta y_1 + a_2. \cos(A_2, z_1).\, \Delta z_1 + a'_2. \cos(A'_2, x_1).\, \Delta x'_1 + \ldots + T_2.\, \partial t \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

положительными и равными нулю, и функціи:

$$\left.\begin{array}{l} b_1. \cos(B_1, x_1).\, \Delta x_1 + b_1. \cos(B_1, y_1).\, \Delta y_1 + b_1. \cos(B_1, z_1).\, \Delta z_1 + b'_1. \cos(B'_1, x_1).\, \Delta x'_1 + \ldots + \mathrm{T}_1.\, \partial t \\ b_2. \cos(B_2, x_1).\, \Delta x_1 + b_2. \cos(B_2, y_1).\, \Delta y_1 + b_2. \cos(B_2, z_1).\, \Delta z_1 + b'_2. \cos(B'_2, x_1).\, \Delta x'_1 + \ldots + \mathrm{T}_2.\, \partial t \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (2)$$

равными нулю. Въ предъидущихъ функціяхъ:

$$a_1, a'_1, \ldots T_1, a_2, a'_2, \ldots T_2, \ldots$$
$$b_1, b'_1, \ldots \mathrm{T}_1, b_2, b'_2, \ldots \mathrm{T}_2, \ldots$$

означаютъ данные коеффиціенты, извѣстнымъ образомъ зависящіе отъ координатъ и времени t, а

$$A_1, A'_1 \ldots A_2, A'_2 \ldots$$
$$B_1, B'_1 \ldots B_2, B'_2 \ldots$$

означаютъ данныя направленія, постоянныя или перемѣнныя.

Предполагая, что на систему матеріальныхъ точекъ $m, m' \ldots$, опредѣляемую условіями, относящимися къ функціямъ (1) и (2), дѣйствуютъ силы, которыхъ проложенія на неподвижныя оси координатъ соотвѣтственно суть:

$$X_1, Y_1, Z_1, X'_1, Y'_1, Z'_1 \ldots,$$

найдемъ условія дѣйствительнаго перемѣщенія системы $\partial x_1, \partial y_1, \partial z_1, \partial x'_1, \partial y'_1, \partial z'_1 \ldots$

Дѣйствительное перемѣщеніе системы матеріальныхъ точекъ будетъ обращать функціи (1) и (2) въ нуль, если только препятствія, къ которымъ относятся сіи функціи, въ самомъ дѣлѣ служатъ препятствіями при перемѣщеніи системы. Препятствія, къ которымъ относятся функціи (1), закрываютъ для массъ системы нѣкоторую часть пространства, оставляя другую его часть свободною для перемѣщеній: для второй части пространства функціи (1) положительны, для первой—отрицательны; препятствіе будетъ дѣйствительно только тогда препятствіемъ, когда будетъ удерживать переходъ матеріальныхъ точекъ системы изъ одной части пространства въ другую; а потому дѣйствительное перемѣщеніе системы, которое вмѣстѣ съ тѣмъ есть и возможное, будетъ происходить на границѣ, отдѣляющей пространство возможныхъ перемѣщеній отъ невозможныхъ, въ противномъ случаѣ перемѣщеніе будетъ независимо отъ препятствія. Отсюда видимъ, что дѣйствительное перемѣщеніе, обращая функціи (1) въ нуль, будетъ опредѣляться уравненіями:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\, \{a_1. \cos(A_1, x_1).\, \partial x_1 + a_1. \cos(A_1, y_1).\, \partial y_1 + a_1. \cos(A_1, z_1).\, \partial z_1\} + T_1\, \partial t = 0 \\ \Sigma\, \{a_2. \cos(A_2, x_1).\, \partial x_1 + a_2. \cos(A_2, y_1).\, \partial y_1 + a_2. \cos(A_2, z_1).\, \partial z_1\} + T_2\, \partial t = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots (3)$$

гдѣ знакъ суммы Σ распространяется на всѣ точки системы. Такъ какъ возможныя перемѣщенія обращаютъ функціи (2) въ нуль, а дѣйствительное перемѣщеніе системы принадлежитъ къ числу возможныхъ, то дѣйствительное перемѣщеніе должно удовлетворять уравненіямъ:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\, \{b_1. \cos(B_1, x_1).\, \partial x_1 + b_1. \cos(B_1, y_1).\, \partial y_1 + b_1. \cos(B_1, z_1).\, \partial z_1\} + \mathrm{T}_1.\, \partial t = 0 \\ \Sigma\, \{b_2. \cos(B_2, x_1).\, \partial x_1 + b_2. \cos(B_2, y_1).\, \partial y_1 + b_2. \cos(B_2, z_1).\, \partial z_1\} + \mathrm{T}_2.\, \partial t = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots (4)$$

Какое-же изъ перемѣщеній, удовлетворяющихъ уравненіямъ (3) и (4), дѣйствительно? Изъ перемѣщеній, удовлетворяющихъ уравненіямъ (3) и (4) то дѣйствительно, при которомъ потерянныя силы, составныя изъ силъ, дѣйствующихъ на матеріальныя точки системы, и изъ силъ инерціи, развивающихся при дѣйствительномъ перемѣщеніи, не стремятся произвести всѣхъ тѣхъ перемѣщеній, которыя, соединяясь съ перемѣщеніемъ дѣйствительнымъ, возможны. Выразимъ это условіе дѣйствительнаго перемѣщенія аналитически.

Означимъ чрезъ $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x'_1, \delta y'_1, \delta z'_1 \ldots$ совершенно произвольное перемѣщеніе матеріальныхъ точекъ системы. Сіе перемѣщеніе, соединяясь съ перемѣщеніемъ дѣйствительнымъ, дастъ перемѣщеніе:

$$dx_1 + \delta x_1,\ dy_1 + \delta y_1,\ dz_1 + \delta z_1,\ dx'_1 + \delta x'_1,\ dy'_1 + \delta y'_1,\ dz'_1 + \delta z'_1, \ldots$$

Вставляя сіи величины вмѣсто $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1, \Delta x'_1, \Delta y'_1, \Delta z'_1 \ldots$ въ функціи (1) и (2), получаемъ:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\,\{a_1.\cos(A_1, x_1).(dx_1 + \delta x_1) + a_1.\cos(A_1, y_1).(dy_1 + \delta y_1) + a_1.\cos(A_1, z_1).(dz_1 + \delta z_1)\} + T_1.dt \\ \Sigma\,\{a_2.\cos(A_2, x_1).(dx_1 + \delta x_1) + a_2.\cos(A_2, y_1).(dy_1 + \delta y_1) + a_2.\cos(A_2, z_1).(dz_1 + \delta z_1)\} + T_2.dt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\,\{b_1.\cos(B_1, x_1).(dx_1 + \delta x_1) + b_1.\cos(B_1, y_1).(dy_1 + \delta y_1) + b_1.\cos(B_1, z_1).(dz_1 + \delta z_1)\} + \mathrm{T}_1.dt \\ \Sigma\,\{b_2.\cos(B_2, x_1).(dx_1 + \delta x_1) + b_2.\cos(B_2, y_1).(dy_1 + \delta y_1) + b_2.\cos(B_2, z_1).(dz_1 + \delta z_1)\} + \mathrm{T}_2.dt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots (6)$$

Но сіи функціи, въ слѣдствіе уравненій (3) и (4), превращаются въ функціи:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\,\{a_1.\cos(A_1, x_1).\delta x_1 + a_1.\cos(A_1, y_1).\delta y_1 + a_1.\cos(A_1, z_1).\delta z_1\} \\ \Sigma\,\{a_2.\cos(A_2, x_1).\delta x_1 + a_2.\cos(A_2, y_1).\delta y_1 + a_2.\cos(A_2, z_1).\delta z_1\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\,\{b_1.\cos(B_1, x_1).\delta x_1 + b_1.\cos(B_1, y_1).\delta y_1 + b_1.\cos(B_1, z_1).\delta z_1\} \\ \Sigma\,\{b_2.\cos(B_2, x_1).\delta x_1 + b_2.\cos(B_2, y_1).\delta y_1 + b_2.\cos(B_2, z_1).\delta z_1\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (8)$$

Отсюда заключаемъ, что всѣ тѣ перемѣщенія $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x'_1, \delta y'_1, \delta z'_1 \ldots$, которыя, соединяясь съ перемѣщеніемъ дѣйствительнымъ, даютъ перемѣщеніе возможное, дѣлаютъ функціи (7) положительными и равными нулю, а функціи (8)—равными нулю.

Такъ какъ силы не стремятся произвести всякаго такаго перемѣщенія, относительно котораго полный ихъ моментъ не пріобрѣтаетъ положительной величины и такъ какъ возможныя перемѣщенія дѣлаютъ функціи (1) равными нулю и положительными, а функціи (2)—равными нулю, то условіе дѣйствительнаго перемѣщенія: *потерянныя силы не стремятся произвести всѣхъ тѣхъ перемѣщеній, которыя, соединяясь съ перемѣщеніемъ дѣйствительнымъ*, *возможны*, приводится къ условію, что линейная функція:

$$\Sigma\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right).\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right).\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right).\delta z\right\} \ldots\ldots\ldots (9)$$

выражающая полный моментъ потерянныхъ при дѣйствительномъ перемѣщеніи силъ, не пріобрѣтаетъ положительной величины относительно всѣхъ перемѣщеній $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x'_1, \delta y'_1, \delta z'_1 \ldots$, которыя дѣлаютъ функціи (5) положительными и равными нулю, а функціи (6)—равными нулю, или, что все равно, функціи (7) положительными и равными нулю, а фунціи (8)—равными нулю; а для сего необходимо и достаточно, чтобы линейная функція (9), сложенная съ линейными функціями (7) и (8), изъ которыхъ каждая помножена на соотвѣтствующій ей неопредѣленный множитель $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \mu_1, \mu_2 \ldots$ равнялась нулю для всякаго совершенно произвольнаго перемѣщенія системы $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x'_1, \delta y'_1, \delta z'_1 \ldots$

$$\Sigma\left\{\left(X_1 - m\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)\delta x_1 + \left(Y_1 - m\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)\delta y_1 + \left(Z_1 - m\frac{d^2z_1}{dt^2}\right)\delta z_1\right\} + \ldots (10)$$

$$+\lambda_1\Sigma\{a_1\cos(A_1,x_1)\delta x_1 + a_1.\cos(A_1,y_1)\delta y_1 + a_1\cos(A_1,z_1)\delta z_1\} + \lambda_2\Sigma\{a_2.\cos(A_2,x_1)\delta x_1 + a_2\cos(A_2,y_1)\delta y_1 + a_2\cos(A_2,z_1)\delta z_1\} + .$$

$$+\mu_1\Sigma\{b_1.\cos(B_1,x_1)\delta x_1 + b_1\cos(B_1,y_1)\delta y_1 + b_1\cos(B_1,z_1)\delta z_1\} + \mu_2\Sigma\{b_2.\cos(B_2,x_1)\delta x_1 + b_2\cos(B_2,y_1)\delta y_1 + b_2\cos(B_2,z_1)\delta z_1\} + . = 0$$

и чтобы множители $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$, соотвѣтствующіе функціямъ (1), были положительны.

Уравненія (3), (4) и уравненіе (10), существующее для всякаго совершенно произвольнаго перемѣщенія системы, выражая условія дѣйствительнаго перемѣщенія, вполнѣ его опредѣляютъ.

2. Пусть ξ_1, η_1, ζ_1 суть координаты, опредѣляющія положеніе начала координатъ перемѣщающихся осей относительно осей неподвижныхъ, и пусть $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, суть косинусы угловъ, которые дѣлаетъ соотвѣтственно каждая изъ подвижныхъ осей координатъ съ тремя осями неподвижными. Означая чрезъ x, y, z координаты какой-ни-будь матеріальной точки системы въ отношеніи осей перемѣщающихся, имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \xi_1 + ax + a'y + a''z \\ y_1 = \eta_1 + bx + b'y + b''z \\ z_1 = \zeta_1 + cx + c'y + c''z \end{array}\right\} \ldots (11)$$

гдѣ девять косинусовъ угловъ связаны между собою шестью уравненіями:

$$\left.\begin{array}{ll} a^2 + b^2 + c^2 = 1 & a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 & a''a + b''b + c''c = 0 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 & aa' + bb' + cc' = 0 \end{array}\right\} (12)$$

или, что все равно, уравненіями:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1\,, \quad bc + b'c' + b''c'' = 0 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1\,, \quad ca + c'a' + c''a'' = 0 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1\,, \quad ab + a'b' + a''b'' = 0 \end{array}\right\} \quad (13)$$

Притомъ имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l} b'c'' - c'b'' = a\ ,\ cb'' - bc'' = a'\ ,\ bc' - cb' = a'' \\ c'a'' - a'c'' = b\ ,\ ac'' - ca'' = b'\ ,\ ca' - ac' = b'' \\ a'b'' - b'a'' = c\ ,\ ba'' - ab'' = c'\ ,\ ab' - ba' = c'' \end{array}\right\} \quad (14)$$

Изъ уравненій (11), обращая вниманіе на уравненія (12), находимъ:

$$\left.\begin{array}{l} x = ax_1 + by_1 + cz_1 - (a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1) \\ y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 - (a'\xi_1 + b'\eta_1 + c'\zeta_1) \\ z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1 - (a''\xi_1 + b''\eta_1 + c''\zeta_1) \end{array}\right\} \quad . \quad (15)$$

Относя характеристику Δ къ измѣненію x, y, z, происходящему только отъ произвольнаго измѣненія x_1, y_1, z_1, изъ уравненій (15) получаемъ:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x = a.\,\delta x_1 + b.\,\delta y_1 + c.\,\delta z_1 \\ \Delta y = a'.\delta x_1 + b'.\,\delta y_1 + c'.\delta z_1 \\ \Delta z = a''.\,\delta x_1 + b''.\,\delta y_1 + c''.\delta z_1 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (16)$$

откуда:

$$\left.\begin{array}{l} \delta x_1 = a.\ \Delta x + a'.\ \Delta y + a''.\ \Delta z \\ \delta y_1 = b.\ \Delta x + b'.\ \Delta y + b''.\ \Delta z \\ \delta z_1 = c.\ \Delta x + c'.\ \Delta y + c''.\ \Delta z \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (17)$$

Изъ уравненій (11) получаемъ:

$$\begin{array}{l} \delta x_1 = \delta\xi_1 + x.\,\delta a + y.\,\delta a' + z.\,\delta a'' + a.\,\delta x + a'.\delta y + a''\,\delta z \\ \delta y_1 = \delta\eta_1 + x.\,\delta b + y.\,\delta b' + z.\,\delta b'' + b.\,\delta x + b'.\,\delta y + b''\,\delta z \\ \delta z_1 = \delta\zeta_1 + x.\,\delta c + y.\,\delta c' + z.\,\delta c'' + c.\,\delta x + c'.\,\delta y + c''\,\delta z \end{array}$$

Вставляя сіи величины въ уравненія (16), получаемъ:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x = a.\,\delta\xi_1 + b.\,\delta\eta_1 + c.\,\delta\zeta_1 + y\,(a.\,\delta a' + b.\,\delta b' + c.\,\delta c') + z\,(a.\,\delta a'' + b.\,\delta b'' + c.\,\delta c'') + \delta x \\ \Delta y = a'.\,\delta\xi_1 + b'.\,\delta\eta_1 + c'.\,\delta\zeta_1 + z\,(a'.\,\delta a'' + b'.\delta b'' + c'.\delta c'') + x(a'.\,\delta a + b'.\,\delta b + c'.\,\delta c) + \delta y \\ \Delta z = a''.\delta\xi_1 + b''.\,\delta\eta_1 + c''.\,\delta\zeta_1 + x(a''.\delta a + b''.\delta b + c''.\,\delta c) + y\,(a''.\,\delta a' + b''.\,\delta b' + c''.\delta c') + \delta z \end{array}\right\} \quad . \quad (18)$$

Такъ какъ девять косинусовъ угловъ связаны между собою шестью уравненіями, то всегда можно, обращая вниманіе на уравненія (12), положить:

$$\left.\begin{array}{l} a''\,\delta a' + b''.\,\delta b' + c''\,\delta c' = -(a'\,\delta a'' + b'\,\delta b'' + c'\,\delta c'') = \delta\phi_x \\ a.\,\delta a'' + b.\,\delta b'' + c.\,\delta c'' = -(a''.\,\delta a + b''.\,\delta b + c''.\,\delta c) = \delta\phi_y \\ a'.\delta a + b'.\delta b + c'.\,\delta c = -(a.\,\delta a' + b.\,\delta b' + c.\,\delta c') = \delta\phi_z \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Полагая притомъ:

$$\begin{array}{l} a.\,\delta\xi_1 + b\ \delta\eta_1 + c.\ \delta\zeta_1 = \Delta\xi \\ a'.\delta\xi_1 + b'.\,\delta\eta_1 + c'.\ \delta\zeta_1 = \Delta\eta \\ a''.\delta\xi_1 + b''.\delta\eta_1 + c''.\ \delta\zeta_1 = \Delta\zeta\ , \end{array}$$

изъ уравненій (18) получаемъ:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x = \Delta\xi + (z.\,\delta\phi_y - y.\,\delta\phi_z) + \delta x \\ \Delta y = \Delta\eta + (x.\,\delta\phi_z - z.\,\delta\phi_x) + \delta y \\ \Delta z = \Delta\zeta + (y.\,\delta\phi_x - x\ \delta\phi_y) + \delta z \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (20)$$

гдѣ перемѣщенія $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta, \delta\phi_x, \delta\phi_y, \delta\phi_z$, не завися отъ координатъ матеріальныхъ точекъ системы, общи всѣмъ симъ точкамъ.

Переходя отъ перемѣщеній совершенно произвольныхъ къ перемѣщеніямъ дѣйствительнымъ, къ которымъ относится характеристика ∂, и означая характеристикою d измѣненіе координатъ x, y, z, происходящее отъ измѣненія координатъ x_1, y_1, z_1 при дѣйствительномъ перемѣщеніи въ отношеніи неподвижныхъ осей, изъ уравненій (15) имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{\partial t} = a.\dfrac{\partial x_1}{\partial t} + b.\dfrac{\partial y_1}{\partial t} + c.\dfrac{\partial z_1}{\partial t} \\ \dfrac{dy}{\partial t} = a'.\dfrac{\partial x_1}{\partial t} + b'.\dfrac{\partial y_1}{\partial t} + c'.\dfrac{\partial z_1}{\partial t} \\ \dfrac{dz}{\partial t} = a''.\dfrac{\partial x_1}{\partial t} + b''.\dfrac{\partial y_1}{\partial t} + c''.\dfrac{\partial z_1}{\partial t} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (21)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{\partial t^2} = a.\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + b.\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + c.\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} \\ \dfrac{d^2y}{\partial t^2} = a'.\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + b'.\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + c'.\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} \\ \dfrac{d^2z}{\partial t^2} = a''.\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + b''.\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + c''.\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (22)$$

Изъ сихъ уравненій получаемъ:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} = a.\dfrac{dx}{\partial t} + a'.\dfrac{dy}{\partial t} + a''.\dfrac{dz}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial t} = b.\dfrac{dx}{\partial t} + b'.\dfrac{dy}{\partial t} + b''.\dfrac{dz}{\partial t} \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial t} = c.\dfrac{dx}{\partial t} + c'.\dfrac{dy}{\partial t} + c''.\dfrac{dz}{\partial t} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (23)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = a.\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} + a'.\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a''.\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = b.\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} + b'.\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b''.\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} = c.\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} + c'.\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c''.\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} \end{array}\right\} \quad . \quad (24)$$

Выводя изъ уравненій (11) величины для $\partial x_1, \partial y_1, \partial z_1$, вставляя сіи величины въ уравненія (21) и полагая притомъ, согласно уравненіямъ (19):

$$\left.\begin{aligned} a''.da' + b''.db' + c''.dc' &= -(a'.da'' + b'.db'' + c'.dc'') = d\varphi_x = \omega_x.dt \\ a.da'' + b.db'' + c.dc'' &= -(a''.da + b''.db + c''.dc) = d\varphi_y = \omega_y.dt \\ a'.da + b'.db + c'.dc &= -(a.da' + b.db' + c.dc') = d\varphi_z = \omega_z.dt, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

изъ уравненій (21) получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{a.d\xi_1 + b\ d\eta_1 + c.d\zeta_1}{dt} + z\,\omega_y - y\,\omega_z + \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{a'\,d\xi_1 + b'\,d\eta_1 + c'\,d\zeta_1}{dt} + x\,\omega_z - z\,\omega_x + \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{a''\,d\xi_1 + b''\,d\eta_1 + c''\,d\zeta_1}{dt} + y\,\omega_x - x\,\omega_y + \frac{dz}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Вставляя сіи величины въ уравненія (23), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{d\xi_1}{dt} + a\left(\frac{dx}{dt} + z\,\omega_y - y\,\omega_z\right) + a'\left(\frac{dy}{dt} + \omega_z x - \omega_x z\right) + a''\left(\frac{dz}{dt} + \omega_x y - \omega_y x\right) \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{d\eta_1}{dt} + b\left(\frac{dx}{dt} + z\,\omega_y - y\,\omega_z\right) + b'\left(\frac{dy}{dt} + \omega_z x - \omega_x z\right) + b''\left(\frac{dz}{dt} + \omega_x y - \omega_y x\right) \\ \frac{dz_1}{dt} &= \frac{d\zeta_1}{dt} + c\left(\frac{dx}{dt} + z\,\omega_y - y\,\omega_z\right) + c'\left(\frac{dy}{dt} + \omega_z x - \omega_x z\right) + c''\left(\frac{dz}{dt} + \omega_x y - \omega_y x\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (27)$$

Продифференцировавъ сіи выраженія по перемѣнному t, получимъ вторыя производныя x_1, y_1, z_1 по t. Вставляя сіи величины въ ур (22), согласно ур. (25), получаемъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{a.\,d^2\xi_1 + b.\,d^2\eta_1 + c.\,d^2\zeta_1}{dt^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dx}{dt} + \omega_y z - \omega_z y\right) - \omega_z\left(\frac{dy}{dt} + \omega_z x - \omega_x z\right) + \omega_y\left(\frac{dz}{dt} + \omega_x y - \omega_y x\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{a'.\,d^2\xi_1 + b'.\,d^2\eta_1 + c'.\,d^2\zeta_1}{dt^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dy}{dt} + \omega_z x - \omega_x z\right) - \omega_x\left(\frac{dz}{dt} + \omega_x y - \omega_y x\right) + \omega_z\left(\frac{dx}{dt} + \omega_y z - \omega_z y\right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{a''\,d^2\xi_1 + b''.\,d^2\eta_1 + c''.\,d^2\zeta_1}{dt^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dz}{dt} + \omega_x y - \omega_y x\right) - \omega_y\left(\frac{dx}{dt} + \omega_y z - \omega_z y\right) + \omega_x\left(\frac{dy}{dt} + \omega_z x - \omega_x z\right)$$

или:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{a.\,d^2\xi_1 + b.\,d^2\eta_1 + c.\,d^2\zeta_1}{dt^2} + z.\frac{d\omega_y}{dt} - y.\frac{d\omega_z}{dt} + \omega_y\left(y\omega_x - x\omega_y\right) - \omega_z\left(x\omega_z - z\omega_x\right) + 2\left(\omega_y\frac{dz}{dt} - \omega_z\frac{dy}{dt}\right) + \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{a'.\,d^2\xi_1 + b'.\,d^2\eta_1 + c'.\,d^2\zeta_1}{dt^2} + x.\frac{d\omega_z}{dt} - z.\frac{d\omega_x}{dt} + \omega_z\left(z\omega_y - y\omega_z\right) - \omega_x\left(y\omega_x - x\omega_y\right) + 2\left(\omega_z\frac{dx}{dt} - \omega_x\frac{dz}{dt}\right) + \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{a''.\,d^2\xi_1 + b''.\,d^2\eta_1 + c''.\,d^2\zeta_1}{dt^2} + y.\frac{d\omega_x}{dt} - x.\frac{d\omega_y}{dt} + \omega_x\left(x\omega_z - z\omega_x\right) - \omega_y\left(z\omega_y - y\omega_z\right) + 2\left(\omega_x\frac{dy}{dt} - \omega_y\frac{dx}{dt}\right) + \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} (28)$$

3. Уравненія (20) опредѣляютъ Δx, Δy, Δz, которыя, какъ видно изъ уравненій (16), могутъ быть разсматриваемы какъ проложенія произвольнаго перемѣщенія матеріальной точки относительно неподвижныхъ осей координатъ на направленія, которыя имѣютъ подвижныя оси координатъ въ концѣ времени t. Уравненія (20) показываютъ, что перемѣщенія матеріальной точки въ отношеніи неподвижныхъ осей слагаются изъ перемѣщеній

$$\delta x\,,\ \delta y\,,\ \delta z$$

матеріальной точки въ отношеніи подвижныхъ осей и изъ перемѣщеній:

$$\Delta\xi + z\ \delta\varphi_y - y.\ \delta\varphi_z\,,$$
$$\Delta\eta + x.\delta\varphi_z - z.\delta\varphi_x\,,$$
$$\Delta\zeta + y.\ \delta\varphi_x - x\ \delta\varphi_y\,,$$

которыя матеріальная точка дѣлаетъ, двигаясь вмѣстѣ съ подвижными осями. Покажемъ геометрическое значеніе сихъ послѣднихъ перемѣщеній, зависящихъ отъ шести перемѣщеній

$$\Delta\xi\,,\ \Delta\eta\,,\ \Delta\zeta\,,\ \delta\varphi_x\,,\ \delta\varphi_y\,,\ \delta\varphi_z\,,$$

которыя, не завися отъ координатъ матеріальныхъ точекъ, общи всѣмъ симъ точкамъ.

Перемѣщенія: $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$

суть проложенія перемѣщенія матеріальныхъ точекъ вмѣстѣ съ подвижными осями, котораго проложенія на неподвижныя оси одинаковы для всѣхъ точекъ, слѣд. при которомъ всѣ матеріальныя точки дѣлаютъ перемѣщенія равныя и по одному и тому-же направленію.

Далѣе разсмотримъ перемѣщенія:

$$z.\,\delta\varphi_y - y.\,\delta\varphi_z\ ,\ x.\,\delta\varphi_z - z.\,\delta\varphi_x\ ,\ y.\,\delta\varphi_x - x.\,\delta\varphi_y\ , \quad (29)$$

которыя взяты по направленію подвижныхъ осей, соотвѣтствующимъ концу времени t, и которыя означимъ соотвѣтственно чрезъ

$$\Delta_1 x\ ,\ \Delta_1 y\ ,\ \Delta_1 z.$$

Прежде всего замѣтимъ, что сіи перемѣщенія равны нулю для всѣхъ точекъ, лежащихъ на линіи, проходящей чрезъ начало подвижныхъ осей координатъ и опредѣляемой уравненіями:

$$\frac{x}{\delta\varphi_x} = \frac{y}{\delta\varphi_y} = \frac{z}{\delta\varphi_z} \quad . \ . \ . \ . \quad (30)$$

Означая разстояніе какой-ни-будь точки этой линіи отъ начала подвижныхъ осей координатъ чрезъ l:

$$l = +\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ,$$

и полагая

$$\delta\varphi = +\sqrt{\delta\varphi_x^2 + \delta\varphi_y^2 + \delta\varphi_z^2}\ ,$$

изъ уравненій (30) получаемъ углы, составляемые линіею l съ направленіями подвижныхъ осей координатъ въ концѣ времени t:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{l} &= \cos(l,\,x) = \pm\frac{\delta\varphi_x}{\delta\varphi}\ , \\ \frac{y}{l} &= \cos(l,\,y) = \pm\frac{\delta\varphi_y}{\delta\varphi}\ , \\ \frac{z}{l} &= \cos(l,\,z) = \pm\frac{\delta\varphi_z}{\delta\varphi} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \quad (31)$$

Если помножимъ соотвѣтственно на x, y, z перемѣщенія (29) и сложимъ, то въ суммѣ получимъ нуль:

$$x.\,\Delta_1 x + y.\,\Delta_1 y + z.\,\Delta_1 z = 0 \quad . \ . \ . \quad (32)$$

уравненіе поверхности сферической, которой центръ, находится въ началѣ подвижныхъ осей координатъ.

Если помножимъ выраженія (29) на $\delta\varphi_x, \delta\varphi_y, \delta\varphi_z$, которыя пропорціональны $\cos(l,x)$, $\cos(l,y)$ $\cos(l,z)$, и сложимъ, то въ суммѣ получимъ тоже нуль:

$$\cos(l\,,x)\,\Delta_1 x + \cos(l,y)\,\Delta_1 y + \cos(l,z)\,\Delta_1 z = 0. \quad (33)$$

уравненіе плоскости, перпендикулярной къ линіи l.

Изъ уравненій (32) и (33) заключаемъ, что перемѣщенія (29) какой-ни-будь точки (x, y, z) системы суть проложенія перемѣщенія сей точки, которое находится и на поверхности сферы, имѣющей свой центръ въ началѣ подвижныхъ координатъ и проходящей чрезъ разсматриваемую точку, и на плоскости, которая, проходя чрезъ разсматриваемую точку, перпендикулярна къ линіи l, опредѣляемой уравненіями (30). И такъ разсматриваемое перемѣщеніе есть дуга окружности круга, которой центръ находится на линіи l и которой плоскость перпендикулярна къ сей послѣдней.

Означая сіе перемѣщеніе чрезъ $\Delta_1 s$ и вставляя вмѣсто $\Delta_1 x$ $\Delta_1 y$, $\Delta_1 z$, ихъ величины въ уравненіе:

$$\Delta_1 s^2 = \Delta_1 x^2 + \Delta_1 y^2 + \Delta_1 z^2\ ,$$

получаемъ:

$$\Delta_1 s^2 = (x^2+y^2+z^2)\,\delta\varphi^2 - (x.\,\delta\varphi_x + y.\,\delta\varphi_y + z.\,\delta\varphi_z)^2.$$

Полагая:

$$x^2+y^2+z^2 = R^2\ ,$$

гдѣ R означаетъ разстояніе разсматриваемой точки системы отъ начала координатъ, изъ предъидущаго уравненія получаемъ:

$$\Delta_1 s^2 = R^2.\,\delta\varphi^2 - R^2.\,\delta\varphi^2.\left\{\frac{x}{R}.\cos(l\,,\,x) + \frac{y}{R}.\cos(l\,,y) + \frac{z}{R}.\cos(l,\,z)\right\}$$

$$= R^2.\,\delta\varphi^2\,\{1-\cos^2(l,R)\} = R^2.\,\delta\varphi^2.\sin^2(l,R) = r^2.\,\delta\varphi^2\ ,$$

гдѣ $r = R.\sin(l\,,R)$ означаетъ радіусъ дуги перемѣщенія $\Delta_1 s$, описываемаго матеріальною точкою (x, y, z) около линіи l. Изъ предъидущаго уравненія получаемъ

$$\delta\varphi = \frac{\Delta_1\ s}{r}.$$

Сіе уравненіе показываетъ, что $\delta\varphi$ есть угловое перемѣщеніе системы матеріальныхъ точекъ при вращательномъ ея движеніи вмѣстѣ съ подвижными осями координатъ около линіи l.

Обращая вниманіе только на перемѣщеніе матеріальной точки, зависящее отъ перемѣщенія $\delta\varphi_z$, изъ выраженій (29) получаемъ:

$$\Delta_1 z = 0$$

$$x\,\Delta_1 x + y.\,\Delta_1 y = 0$$

$$\delta\varphi_z = \pm\frac{\sqrt{\Delta_1 x^2 + \Delta_1 y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\ .$$

Сіи уравненія показываютъ, что $\delta\varphi_z$ есть угловое перемѣщеніе системы матеріальныхъ точекъ около оси z-овъ. Подобнымъ образомъ легко показать, что $\delta\varphi_y$ и $\delta\varphi_x$ суть угловыя перемѣщенія около осей y-овъ и x-овъ.

За направленіе линіи l, опредѣляемой уравненіями (30), какъ оси вращательнаго движенія системы, принимается именно то направленіе, съ котораго видно вращательное движеніе прямымъ, слѣва направо. При такомъ условіи, согласно уравненіямъ (19), въ уравненіяхъ (31) должно принимать верхній знакъ $+$. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что въ концѣ времени t оси x, y, z совпали соотвѣтственно съ осями x_1, y_1, z_1; тогда:

$$a=1\ ,\ a'=0\ ,\ a''=0$$
$$b=0\ ,\ b'=1\ ,\ b''=0$$
$$c=0\ ,\ c'=0\ ,\ c''=1;$$

$$\delta\varphi_x = \delta c' = -\,\delta b''$$
$$\delta\varphi_y = \delta a'' = -\,\delta c$$
$$\delta\varphi_z = \delta b = -\,\delta a'$$

Предполагая постепенно, что вращательное движеніе послѣдовательно происходитъ около осей x, y, z и что

слѣд. ось вращенія l постепенно совпадаетъ съ положительнымъ или отрицательнымъ направленіемъ осей x, y, z, изъ предъидущихъ уравненій легко видѣть, что $\delta\varphi_x, \delta\varphi_y, \delta\varphi_z$ будутъ въ тоже время положительны или отрицательны, какъ $\cos(l, x)$, $\cos(l, y)$, $\cos(l, z)$ будутъ равны $+1$ или -1. Отсюда заключаемъ, что въ уравненіяхъ (31) долженъ быть принятъ верхній знакъ:

$$\left.\begin{aligned} \delta\varphi_x &= \delta\varphi . \cos(l, x) \\ \delta\varphi_y &= \delta\varphi . \cos(l, y) \\ \delta\varphi_z &= \delta\varphi . \cos(l, z) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (34)$$

Уравненія (34) выражаютъ весьма важную теорему относительно сложенія угловыхъ перемѣщеній: при вращательномъ движеніи системы около какой-ни-будь оси l, угловое перемѣщеніе около какой-ни-будь оси x равняется угловой скорости системы, помноженной на косинусъ угла, составляемаго осью вращенія съ осью x. Отсюда заключаемъ, что угловыя перемѣщенія можно слагать какъ линейныя перемѣщенія, или какъ силы, отлагая по направленіямъ осей угловыхъ перемѣщеній длины, пропорціональныя симъ перемѣщеніямъ.

Соединяя все сказанное въ одно цѣлое, заключаемъ, что перемѣщеніе системы матеріальныхъ точекъ въ отношеніи неподвижныхъ осей можетъ быть разсматриваемо состоящимъ изъ перемѣщенія въ отношеніи осей, движущихся въ пространствѣ, и изъ перемѣщенія, совокупнаго съ перемѣщеніемъ подвижныхъ осей, и слагающагося изъ переноснаго движенія системы и изъ вращательнаго движенія около оси, проходящей чрезъ начало подвижныхъ осей координатъ.

Перемѣняя, въ предъидущихъ формулахъ, характеристику δ, относящуюся къ произвольному перемѣщенію, на характеристику ∂, относящуюся къ дѣйствительному перемѣщенію, приложимъ всѣ предъидущія разсужденія къ дѣйствительному перемѣщенію системы матеріальныхъ точекъ и найдемъ, что въ уравненіяхъ (25) и (26)

$$\frac{a.\,\partial^2\xi_1 + b.\,\partial^2\eta_1 + c.\,\partial^2\zeta_1}{\partial t^2} + z.\,\frac{\partial\omega_y}{\partial t} - y.\,\frac{\partial\omega_z}{\partial t}$$

$$\frac{a'.\,\partial^2\xi_1 + b'.\,\partial^2\eta_1 + c'.\,\partial^2\zeta_1}{\partial t^2} + x.\,\frac{\partial\omega_z}{\partial t} - z.\,\frac{\partial\omega_x}{\partial t}$$

$$\frac{a''.\,\partial^2\xi_1 + b''.\,\partial^2\eta_1 + c''.\,\partial^2\zeta_1}{\partial t^2} + y.\,\frac{\partial\omega_x}{\partial t} - x.\,\frac{\partial\omega_y}{\partial t}$$

члены-же

$$\left.\begin{aligned} &2.\left(\omega_y.\,\frac{\partial z}{\partial t} - \omega_z.\,\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ &2.\left(\omega_z.\,\frac{\partial x}{\partial t} - \omega_x.\,\frac{\partial z}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ &2.\left(\omega_x.\,\frac{\partial y}{\partial t} - \omega_y.\,\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (38)$$

исчезнутъ. Отсюда заключаемъ, что члены (37) выражаютъ проложенія силы инерціи, которую развиваетъ матеріальная точка, перемѣщаясь вмѣстѣ съ системою подвижныхъ осей координатъ, а члены (38) выражаютъ проложенія силы инерціи, которую развиваетъ

$$\partial\xi_1 \,,\; \partial\eta_1 \,,\; \partial\zeta_1$$

суть дѣйствительныя перемѣщенія поступательнаго движенія системы;

$$\partial\varphi_x \,,\; \partial\varphi_y \,,\; \partial\varphi_z$$

суть угловыя перемѣщенія системы около осей x, y, z при угловомъ перемѣщеніи

$$\partial\varphi = \sqrt{\partial\varphi_x^2 + \partial\varphi_y^2 + \partial\varphi_z^2} \quad . \; . \; . \quad (35)$$

около оси l, называемой *мгновенною осью вращенія* и опредѣляемой уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} \cos(l, x) &= \frac{\partial\varphi_x}{\partial\varphi}\,, \\ \cos(l, y) &= \frac{\partial\varphi_y}{\partial\varphi}\,, \\ \cos(l, z) &= \frac{\partial\varphi_z}{\partial\varphi}\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (36)$$

а

$$\omega_x \,,\; \omega_y \,,\; \omega_z \,,\; \omega = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

суть угловыя скорости около осей x, y, z, l.

4. Послѣ сихъ разсужденій легко уже объяснить себѣ уравненія (28), въ которыхъ

$$\frac{d^2x}{\partial t^2}\,,\; \frac{d^2y}{\partial t^2}\,,\; \frac{d^2z}{\partial t^2}\,,$$

могутъ быть, какъ показываютъ уравненія (22), разсматриваемы какъ проложенія силъ инерціи, развившихся при дѣйствительномъ перемѣщеніи системы относительно неподвижныхъ осей координатъ, на направленія подвижныхъ осей координатъ, соотвѣтствующія концу времени t.

Предполагая, что матеріальная точка неизмѣняемо связана съ подвижными осями координатъ, видимъ, что въ уравненіяхъ (28) останутся только члены:

$$\left.\begin{aligned} &+\omega_y\,(y\,\omega_x - x\,\omega_y) - \omega_z\,(x\,\omega_z - z\,\omega_x) \\ &+\omega_z\,(z\,\omega_y - y\,\omega_z) - \omega_x\,(y\,\omega_x - x\,\omega_y) \\ &+\omega_x\,(x\,\omega_z - z\,\omega_x) - \omega_y\,(z\,\omega_y - y\,\omega_z) \end{aligned}\right\} \,, \quad . \; . \quad (37)$$

матеріальная точка при своемъ движеніи относительно подвижныхъ осей координатъ.

Объяснимъ себѣ выраженія (37) и (38). Прежде всего разсмотримъ первые члены выраженій (37). Эти члены выражаютъ силу инерціи, развиваемую матеріальною точкою при перемѣщеніи, общемъ всѣмъ точкамъ и равномъ для всѣхъ ихъ (при переносномъ движеніи системы). Проложенія этой силы инерціи на направленія неподвижныхъ осей координатъ будутъ:

$$\frac{\partial^2\xi_1}{\partial t^2}\,,\quad \frac{\partial^2\eta_1}{\partial t^2}\,,\quad \frac{\partial^2\zeta_1}{\partial t^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (39)$$

Означая чрезъ u скорость матеріальной точки, соотвѣтствующую этому перемѣщенію въ концѣ времени t,

а чрезъ ϱ_u радіусъ кривизны кривой, описываемой матеріальною точкою, имѣемъ:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = u.\cos(u, x_1),$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = u.\cos(u, y_1),$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = u.\cos(u, z_1).$$

Откуда:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.\cos(u, x_1) + u.\frac{\partial \cos(u, x_1)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.\cos(u, y_1) + u.\frac{\partial \cos(u, y_1)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.\cos(u, z_1) + u.\frac{\partial \cos(u, z_1)}{\partial t}$$

Означая чрезъ $\partial\sigma$ перемѣщеніе, соотвѣтствующее переносному движенію, слѣд. полагая:

$$u = \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad \partial t = \frac{\partial \sigma}{u},$$

и замѣчая, что

$$\cos(u, x_1) = \frac{\partial \xi_1}{\partial \sigma},$$

$$\cos(u, y_1) = \frac{\partial \eta_1}{\partial \sigma},$$

$$\cos(u, z_1) = \frac{\partial \zeta_1}{\partial \sigma},$$

изъ предъидущихъ уравненій получаемъ:

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.\cos(u, x_1) + u^2.\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.\cos(u, y_1) + u^2.\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.\cos(u, z_1) + u^2.\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \sigma^2}$$

Но послику:

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{\varrho_u}.\cos(\varrho_u, x_1),$$

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{\varrho_u}.\cos(\varrho_u, y_1),$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{\varrho_u}.\cos(\varrho_u, z_1),$$

то:

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.\cos(u, x_1) + \frac{u^2}{\varrho_u}.\cos(\varrho_u, x_1)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.\cos(u, y_1) + \frac{u^2}{\varrho_u}.\cos(\varrho_u, y_1)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.\cos(u, z_1) + \frac{u^2}{\varrho_u}.\cos(\varrho_u, z_1)$$

Помноживши сіи выраженія соотвѣтственно на a, b, c; на a', b', c'; на a'', b'', c'', получимъ для первыхъ членовъ выраженій (37) слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}.\cos(u, x) + \frac{u^2}{\varrho_u}.\cos(\varrho_u, x) \\ &\frac{\partial u}{\partial t}.\cos(u, y) + \frac{u^2}{\varrho_u}.\cos(\varrho_u, y) \\ &\frac{\partial u}{\partial t}.\cos(u, z) + \frac{u^2}{\varrho_u}.\cos(\varrho_u, z) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (40)$$

Изъ выраженій (40) видимъ, что сила инерціи, развивающаяся при перемѣщеніи матеріальной точки, соотвѣтствующемъ переносному движенію системы, состоитъ изъ двухъ силъ: одну силу инерціи развиваетъ матеріальная точка по направленію касательной къ описываемой кривой, сопротивляясь измѣненію скорости движенія; другую-же силу инерціи развиваетъ матеріальная точка по направленію радіуса кривизны, слѣдовательно перпендикулярно къ направленію движенія, сопротивляясь измѣненію направленія движенія; — такъ что если матеріальная точка при переносномъ движеніи перемѣщается по прямой линіи, то $\varrho_u = \infty$ и вторая изъ упомянутыхъ силъ становится равною нулю.

Обратимся теперь къ силамъ инерціи, развивающимся при общемъ вращательномъ движеніи системы:

$$\left.\begin{aligned} &z.\frac{\partial \omega_y}{\partial t} - y.\frac{\partial \omega_z}{\partial t} \\ &x.\frac{\partial \omega_z}{\partial t} - z.\frac{\partial \omega_x}{\partial t} \\ &y.\frac{\partial \omega_x}{\partial t} - x.\frac{\partial \omega_y}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

$$\left.\begin{aligned} &\omega_y.(\omega_x.y - \omega_y x) - \omega_z.(\omega_z x - \omega_x z) \\ &\omega_z.(\omega_y.z - \omega_z y) - \omega_x.(\omega_x y - \omega_y x) \\ &\omega_x.(\omega_z.x - \omega_x z) - \omega_y.(\omega_y z - \omega_z y) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (42)$$

Означая чрезъ R разстояніе матеріальной точки (x, y, z) отъ начала подвижныхъ осей координатъ, имѣемъ:

$$x = R.\cos(R, x), \quad y = R.\cos(R, y), \quad z = R.\cos(R, z).$$

Замѣчая притомъ, что при общемъ перемѣщеніи вращательнаго движенія системы, направленіе оси вращенія разсматривалось неизмѣннымъ, изъ ур. (36) получаемъ:

$$\omega_x = \omega.\cos(l, x), \quad \omega_y = \omega.\cos(l, y), \quad \omega_z = \omega.\cos(l, z)$$

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial t}.\cos(l, x),$$

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial t}.\cos(l, y),$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial t}.\cos(l, z).$$

Вставляя сіи величины въ выраженія (41), соотвѣтственно получаемъ:

$$
\left.\begin{aligned}
R.\frac{d\omega}{dt}.\left\{\cos(R,z).\cos(l,y)-\cos(R,y).\cos(l,z)\right\}&=R.\frac{d\omega}{dt}\sin(R,l).\cos(\partial\varphi,x)=r.\frac{d\omega}{dt}.\cos(\partial\varphi,x)\\
R.\frac{d\omega}{dt}.\left\{\cos(R,x).\cos(l,z)-\cos(R,z).\cos(l,x)\right\}&=R.\frac{d\omega}{dt}\sin(R,l).\cos(\partial\varphi,y)=r.\frac{d\omega}{dt}.\cos(\partial\varphi,y)\\
R.\frac{d\omega}{dt}.\left\{\cos(R,y).\cos(l,x)-\cos(R,x).\cos(l,y)\right\}&=R.\frac{d\omega}{dt}\sin(R,l).\cos(\partial\varphi,z)=r.\frac{d\omega}{dt}.\cos(\partial\varphi,z)
\end{aligned}\right\}\quad(43)
$$

гдѣ $\partial\varphi$ означаетъ направленіе угловаго перемѣщенія въ концѣ времени t, перпендикулярное къ плоскости, опредѣляемой направленіями линій l и R, и гдѣ r означаетъ радіусъ дуги угловаго перемѣщенія.

Для выраженій (42) имѣемъ:

$$
\begin{aligned}
\omega_y.z-\omega_z.y&=\omega.R.\{\cos(l,y).\cos(R,z)-\cos(l,z).\cos(R,y)\}=\omega R.\sin(R,l).\cos(\partial\varphi,x)=\omega r.\cos(\partial\varphi,x)\\
\omega_z.x-\omega_x.z&=\omega.R.\{\cos(l,z).\cos(R,x)-\cos(l,x).\cos(R,z)\}=\omega R.\sin(R,l).\cos(\partial\varphi,y)=\omega r.\cos(\partial\varphi,y)\\
\omega_x.y-\omega_y.x&=\omega.R.\{\cos(l,x).\cos(R,y)-\cos(l,y).\cos(R,x)\}=\omega R.\sin(R,l).\cos(\partial\varphi,z)=\omega r.\cos(\partial\varphi,z)
\end{aligned}
$$

Вставляя сіи величины въ выраженія (42), находимъ:

$$
\left.\begin{aligned}
\omega^2 r.\{\cos(l,y).\cos(\partial\varphi,z)-\cos(l,z).\cos(\partial\varphi,y)\}&=\omega^2 r.\cos(r,x)\\
\omega^2 r.\{\cos(l,z).\cos(\partial\varphi,x)-\cos(l,x)\cos(\partial\varphi,z)\}&=\omega^2 r.\cos(r,y)\\
\omega^2 r.\{\cos(l,x).\cos(\partial\varphi,y)-\cos(l,y).\cos(\partial\varphi,x)\}&=\omega^2 r.\cos(r,z)
\end{aligned}\right\}\quad.\;.\;.\;.\;.\;(44)
$$

Изъ выраженій (43) и (44) видимъ, что сила инерціи, развивающаяся при общемъ вращательномъ перемѣщеніи системы около мгновенной оси, разлагается на двѣ силы: на силу

$$r\frac{d\omega}{dt},$$

которую развиваетъ матеріальная точка по направленію перемѣщенія, сопротивляясь измѣненію угловой скорости движенія, и на силу

$$\omega^2 r,$$

которую развиваетъ матеріальная точка по направленію радіуса дуги перемѣщенія, сопротивляясь измѣненію направленія перемѣщенія. Отсюда понятно, что обѣ эти силы будутъ равны нулю для всѣхъ точекъ, лежащихъ на мгновенной оси вращенія, для которыхъ r будетъ равнятся нулю.

Обратимся наконецъ къ силамъ инерціи (38), развиваемымъ матеріальною точкою при ея перемѣщеніи въ отношеніи подвижныхъ осей, каковое перемѣщеніе мы и будемъ означать чрезъ ∂s. Означая чрезъ v скорость относительнаго движенія, найдемъ, что первые члены выраженій (38) соотвѣтственно равняются:

$$
\left.\begin{aligned}
2\omega v.\{\cos(l,y).\cos(\partial s,z)-\cos(l,z).\cos(\partial s,y)&=2\omega v.\sin(l,\partial s).\cos\alpha\\
2\omega v.\{\cos(l,z).\cos(\partial s,x)-\cos(l,x).\cos(\partial s,z)&=2\omega v.\sin(l,\partial s).\cos\beta\\
2\omega v.\{\cos(l,x).\cos(\partial s,y)-\cos(l,y).\cos(\partial s,x)&=2\omega v.\sin(l,\partial s).\cos\gamma
\end{aligned}\right\}\quad.\;.\;.\;.\;(45)
$$

гдѣ α, β, γ, означаютъ углы, составляемые перпендикулярною линіею къ мгновенной оси вращенія и къ относительному перемѣщенію съ направленіями подвижныхъ осей координатъ. Отсюда видимъ, что

$$2\omega.v.\sin(l,\partial s)$$

есть сила инерціи, которую развиваетъ матеріальная точка при относительномъ движеніи, сопротивляясь измѣненію направленія вращательнаго движенія, а это показываетъ, что если относительное перемѣщеніе матеріальной точки будетъ перпендикулярно къ направленію вращательнаго движенія, или, что все равно, параллельно мгновенной оси вращенія, то разсматриваемая сила инерціи будетъ равна нулю.

Обратимся наконецъ къ силамъ инерціи:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2},\;\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},\;\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

и разсуждая относительно ихъ точно также какъ относительно выраженій (39), найдемъ, что:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}&=\frac{\partial v}{\partial t}\cos(\partial s,x)+\frac{v^2}{\varrho}.\cos(\varrho,x)\\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}&=\frac{\partial v}{\partial t}\cos(\partial s,y)+\frac{v^2}{\varrho}.\cos(\varrho,y)\\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}&=\frac{\partial v}{\partial t}\cos(\partial s,z)+\frac{v^2}{\varrho}.\cos(\varrho,z)
\end{aligned}\right\}\quad.\;(46)
$$

гдѣ ϱ означаетъ радіусъ кривизны дуги, описываемой матеріальною точкою при относительномъ перемѣщеніи, а v — скорость относительнаго движенія. Выраженія (46) показываютъ, что рарсматриваемая сила инерціи разлагается на двѣ силы: на силу $\frac{\partial v}{\partial t}$, дѣйствующую по направленію движенія, и которую развиваетъ матеріальная точка, сопротивляясь измѣненію скорости относительнаго движенія, и на силу инерціи $\frac{v^2}{\varrho}$, которую развиваетъ матеріальная точка по направленію, перпендикулярному къ направленію движенія,

сопротивляясь измѣненію направленія относительнаго движенія.

Соединяя все сказанное выраженіями (40), (43), (44), (45), (46) въ одно цѣлое, находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{du}{dt}\cdot\cos(u\,,x) + \frac{u^2}{\varrho}\cdot\cos(\varrho_u\,,x) + r\cdot\frac{d\omega}{dt}\cdot\cos(\partial\varpi\,,x) + \omega^2 r\cdot\cos(r\,,x) + 2\omega v\cdot\sin(l\,,\partial s)\cdot\cos\alpha + \\
&\quad + \frac{dv}{dt}\cdot\cos(\partial s\,,\,x) + \frac{v^2}{\varrho}\cdot\cos(\varrho\,,\,x) \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{du}{dt}\cdot\cos(u\,,y) + \frac{u^2}{\varrho}\cdot\cos\varrho_u\,,\,y) + r\cdot\frac{d\omega}{dt}\cdot\cos(\partial\varpi\,,y) + \omega^2 r\cdot\cos(r\,,y) + 2\omega v\cdot\sin(l\,,\partial s)\cdot\cos\beta + \\
&\quad + \frac{dv}{dt}\cdot\cos(\partial s\,,\,y) + \frac{v^2}{\varrho}\cdot\cos(\varrho\,,\,y) \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{du}{dt}\cdot\cos(u\,,z) + \frac{u^2}{\varrho}\cdot\cos(\varrho_u\,,z) + r\cdot\frac{d\omega}{dt}\cdot\cos(\partial\varpi\,,z) + \omega^2 r\cdot\cos(r\,,z) + 2\omega v\cdot\sin(l\,,\partial s)\cdot\cos\gamma + \\
&\quad + \frac{dv}{dt}\cdot\cos(\partial s\,,\,z) + \frac{v^2}{\varrho}\cdot\cos(\varrho\,,\,z)
\end{aligned}\right\}\quad(47)$$

(*Продолженіе въ слѣдующемъ №.*)

О рядѣ Тейлора.

Пусть функція $f^n(x)$, т. е. n-ая производная функціи $f(x)$, будетъ непрерывна между предѣлами $x=a$ и $x=a+h$, и положимъ для сокращенія:

$$1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,k = k!\,,$$

$$\zeta(x) = f(a+x) - f(a) - x f'(a) - \frac{x^2}{2!}f''(a) - \ldots\ldots - \frac{x^n}{n!}f^n(a)\,,$$

$$\lambda(x) = \zeta(x) - \frac{x^n}{h^n}\zeta(h).$$

Функція $\lambda(x)$ исчезаетъ при $x=0$ и $x=h$, и ея производная $\lambda'(x)$

$$\lambda'(x) = \zeta'(x) - \frac{n\,x^{n-1}}{h^n}\zeta(h)$$

непрерывна между этими предѣлами; поэтому она исчезнетъ между ними покрайней мѣрѣ одинъ разъ, при $x=h_1$. Функція $\lambda'(x)$ уничтожается при $x=0$ и $x=h_1$, слѣдов. ея производная $\lambda''(x)$

$$\lambda''(x) = \zeta''(x) - \frac{n.\,n-1.\,x^{n-2}}{h^n}\zeta(h)\,,$$

непрерывная между этими предѣлами, уничтожится между ними покрайней мѣрѣ одинъ разъ, при $x=h_2$. Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы дойдемъ до функціи

$$\lambda^{n-1}(x) = \zeta^{n-1}(x) - \frac{n!\,x}{h^n}\zeta(h)\,,$$

исчезающей при $x=0$ и $x=h_{n-1}$; производная этой функціи, $\lambda^n(x)$,

$$\lambda^n(x) = \zeta^n(x) - \frac{n!}{h^n}\zeta(h)$$

непрерывна между этими предѣлами и поэтому будетъ уничтожаться по крайней мѣрѣ одинъ разъ между ними, при $x=h_n=\theta h$, гдѣ $\theta>0$ и <1, и мы получимъ

$$\zeta(h) = \frac{h^n}{n!}\zeta^n(\theta h)\,,$$

или, по причинѣ что $\zeta^n(x)\ \ f^n(a+x) - f^n(a)$,

$$\zeta(h) = \frac{h^n}{n!}f^n(a+\theta h) - \frac{h^n}{n!}f^n(a)\,.$$

Опуская въ обѣихъ частяхъ этого уравненія членъ $-\frac{h^n}{n!}f^n(a)$, и перенося изъ первой части кромѣ перваго члена всѣ остальные во вторую часть, получимъ извѣстную формулу

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1}f'(a) + \frac{h^2}{2\,!}f''(a) + \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!}f^n(a+\theta h)\,.$$

Слѣдствіе. Если функція $f(x)$ и всѣ ея производныя непрерывны между предѣлами $x=a$ и $x=a+h$, и безконечный рядъ:

$$f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \ldots ;$$

сходящійся, то для каждаго x между этими предѣлами будетъ

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \ldots$$

Г. Тиме.

(Горный Инженеръ, проподаватель раціональной механики въ Горномъ Институтѣ въ С. Петербургѣ).

II.

Обзоръ новѣйшихъ успѣховъ въ познаніи физическаго устройства солнца.

Познанія наши въ отношеніи физическаго устройства поверхности центральнаго тѣла планетной системы могутъ совершенствоваться двумя путями: или непосредственнымъ наблюденіемъ видимыхъ при различныхъ обстоятельствахъ и условіяхъ явленій, происходящихъ на наружной поверхности солнца; или же обнаруженіемъ зависимости въ происхожденіи и развитіи явленій, наблюдаемыхъ на землѣ, отъ скрытаго дѣйствія того же центральнаго тѣла. Первый путь былъ до сихъ поръ найболѣе обильный результатами, какъ и слѣдовало ожидать; ибо къ области онаго принадлежитъ весьма значительное число явленій подлежащихъ непосредственному наблюденію или опыту. Эти явленія, для легчайшаго обзора, можно соединить въ слѣдующія группы:

1. Опредѣленіе силы солнечнаго свѣта вообще; вопросъ постоянства или измѣняемости оной. Напряженіе въ различныхъ частяхъ солнечной поверхности.
2. Измѣненія происходящія на видимой поверхности солнца, пятна и факелы; то что относится къ ихъ появленію, наружному виду, измѣняемости и періодическимъ возвращеніямъ.
3. Явленія короны и красныхъ выступовъ при случаѣ полныхъ солнечныхъ затмѣній.
4. Испытанія свойствъ солнечнаго луча въ физическомъ и химическомъ отношеніяхъ.
5. Теплородное дѣйствіе солнечныхъ лучей, испытаніе одинаково ли возбуждаютъ теплоту различные части солнечной поверхности. Солнце, какъ источникъ теплоты, принадлежитъ ли къ постояннымъ, или къ перемѣннымъ.

Явленія относящіяся ко второму пути изслѣдованія, хотя безъсомнѣнія не малочисленнѣе первыхъ, но по природѣ своей не могутъ быть столь ясно разграничены и позволяютъ только подвести оныя подъ слѣдующія 2 общія группы:

6. Обнаруженіе такихъ періодическихъ и мгновенныхъ измѣненій въ теплородныхъ и вообще метеорологическихъ явленіяхъ земной поверхности, которыя могутъ быть приписаны измѣняемости въ дѣйствіи солнца

и 7. Обнаруженіе подобной зависимости изъ наблюденій магнитнаго состоянія земли.

Прослѣдимъ по порядку въ бѣгломъ очеркѣ всѣ вышеисчисленныя группы явленій съ цѣлію показать какія приращенія доставили онѣ въ новѣйшее время нашимъ познаніямъ по отношеніи къ вопросу, который насъ занимаетъ здѣсь.

1. Опредѣленіе силы солнечнаго свѣта, при чрезвычайномъ различіи этаго источника отъ всѣхъ другихъ естественныхъ и даже искуственныхъ источниковъ и по невозможности пріискать *постоянную* общую единицу мѣры въ фотометрическихъ сравненіяхъ, еще до сихъ поръ не вошло въ предѣлы явленій подлежащихъ строгимъ измѣреніямъ. Всѣ попытки сдѣланныя въ этомъ отношеніи заслуживаютъ конечно только названія грубой оцѣнки, но нисколько не измѣренія; критическій обзоръ оныхъ мы находимъ въ прекрасномъ мемуарѣ Проф. *Зейделя*, публикованномъ въ изданіяхъ Мюнхенской Академіи Наукъ еще въ 1852 г. подъ заглавіемъ: »Untersuchungen über die gegenseitigen Helligkeiten der Fixsterne erster Grösse, nebst einem Anhange über die Helligkeit der Sonne und über die Licht reflectirende Kraft der Planeten.« — Неоспоримо, самый надежный путь въ сравненіи силы совокупнаго свѣта солнца съ свѣтомъ неподвижныхъ звѣздъ все таки до сихъ поръ надобно искать при помощи промежуточнаго предмета сравненій, представляющагося въ отраженномъ свѣтѣ планетъ. Правда, что въ вычисленіе послѣдняго (*) каждый разъ входитъ неизвѣстный коефиціентъ, а именно отношеніе между количествами отраженнаго планетою и падающаго на поверхность оной солнечнаго свѣта, такъ называемое *Albedo;* но познаніе относительной величины послѣдняго для каждой планеты, при болѣе значительной массѣ наблюденій, можетъ также мало по малу совершенствоваться и со временнемъ повести къ рѣшенію вопроса: подвержена ли сила солнечнаго свѣта какимъ либо измѣненіямъ, или постоянна.

Не останавливаясь на предварительныхъ численныхъ результатахъ упомянутаго труда, мы замѣтимъ только мимоходомъ, что допуская вмѣстѣ съ авторомъ, на основаніяхъ нелишенныхъ правдоподобности, что $Alb \; ♂ = \frac{1}{11}$, слѣдовало бы принять, что *Солнце* свѣтлѣе *Веги* въ 75000 милліоновъ разъ, или свѣтлѣе слабѣйшихъ звѣздъ видимыхъ простымъ глазомъ (т. е. 6-ой величины) въ 3 билліона разъ. Этотъ послѣдней резуль-

---

(*) По точной формулѣ Ламберта:

$$\Pi = \frac{2}{3\pi} (\mathrm{Sin}\, v - v\, \mathrm{Cos}\, v)\; Alb.\; \mathrm{Sin}^2 s\; \mathrm{Sin}^2 \sigma : \mathrm{Sin}^2 S$$

тать, не смотря на огромность числа, представляется не совсемъ не вѣроятнымъ ибо по сравненію свѣта Урана произведенномъ Ольберсомъ и по вычисленію выходитъ, что свѣтъ ☉ въ отношеніи къ свѣту Урана = 32 билліона: *Alb*. Урана.

Весьма важнымъ добавленіемъ къ вышеприведеннымъ »Изслѣдованіямъ« является новый мемуаръ Проф. *Зейделя*, публикованный въ 1859 году подъ заглавіемъ »Untersuchungen über die Lichtstärke der Planeten Venus, Mars, Jupiter und Saturn.« На основаніи продолжительныхъ наблюденій, (содержащихъ всего 85 сравненій планетъ съ неподвижными звѣздами), которыя для планеты Марса восходятъ даже къ 1845 году и содержатъ сравненія, при которыхъ свѣтъ планеты въ своихъ крайнихъ фазахъ находился въ отношеніи какъ 1: 31, авторъ приходитъ къ слѣдующимъ окончательнымъ выводамъ относительно силы солнечнаго свѣта на его среднемъ удаленіи отъ земли сравнительно съ свѣтомъ *Веги*:

при посредствѣ:	Свѣтъ солнца сильнѣе свѣта Веги	
Венеры	— — — 26040 милліон: Alb ♀	(*)
Марса	— — — 5746 — —: Alb ♂	
Юпитера	— — — 27700 — —: Alb ♃	
Сатурна	— — — 30500 — —: Alb ♄	

На этихъ числахъ и надобно покамѣсть остановиться, ибо всякое предположеніе относительно абсолютной величины Albedo одной изъ планетъ представляется совершенно произвольнымъ. Во всякомъ случаѣ изъ нихъ несомнѣнно слѣдуетъ, что свѣтъ солнца по меньшей мѣрѣ въ 30000 милл. разъ превосходитъ свѣтъ Веги, ибо въ такомъ случаѣ Albedo *Сатурна* должно бы было принять уже равнымъ единицѣ. А какъ изъ опытовъ Штейнгеля и Зейделя слѣдуетъ, что и полированныя металическія зеркала отражаютъ не болѣе половины падающаго на нихъ свѣта; то по всей вѣроятности предъидущій результатъ долженъ быть по крайней мѣрѣ удвоенъ

Такъ какъ предъидущія числа выражаютъ одну и туже величину, то непосредственное заключеніе, какое можно извлечь изъ нихъ состоитъ въ *приблизительномъ равенствѣ* Albedo для 3-хъ планетъ: Венеры, Юпитера и Сатурна,—результатъ самъ по себѣ весьма замѣчательный; ибо онъ указываетъ на физическое сходство поверхностей этихъ планетъ, отражающихъ свѣтъ въ весьма значительной степени. Напротивъ того Марсъ представляется сравнительно тѣломъ весьма тёмнымъ, отражающимъ едва пятую часть того свѣта, который при равной поверхности, отражали бы Венера, или Юпитеръ (**).

(*) Эти числа суть среднія, выведенныя мною изъ результатовъ, полученныхъ въ 2-хъ предположеніяхъ относительно видимыхъ поперечниковъ каждой изъ 4-хъ планетъ. Неточность въ опредѣленіи видимыхъ поперечниковъ, еще столь значительна, что она оказываетъ напр. для Марса болѣе значительное вліяніе на окончательный выводъ относительной величины Albedo планетъ, чѣмъ неточность фотометрическихъ сравненій. Для Сатурна допущено въ приведеніи наблюденій произвольное предположеніе равенства Albedo для самой планеты и кольца. Можетъ быть однако, что отражательная способность послѣдняго будетъ найдена изъ позднѣйшихъ наблюденій нѣсколько значительнѣе, чѣмъ для планеты. На основаніи одного наблюденія Ольберса выходитъ что, свѣтъ ☉ : Веги = 52000 милл. Alb. ♄.

(**) Сравненія Гершеля и Штейнгеля между свѣтомъ полной Луны и Веги даютъ что Albedo *Луны* еще въ три раза менѣе чѣмъ для Марса.

Понятно, что вышеприведенные результаты составляютъ неболѣе какъ первый, но дѣйствительный шагъ къ познанію относительной силы солнечнаго свѣта и къ будущему рѣшенію важнаго вопроса о постоянствѣ, періодической, или неперіодической измѣняемости онаго. Рѣшеніе послѣдняго вопроса зависитъ здѣсь конечно отъ условія болѣе или менѣе значительнаго постоянства въ отражательной способности планетъ (необходимо подверженной покрайней мѣрѣ періодическимъ колебаніямъ, какъ для Марса); но оно должно неизбѣжно обнаружиться въ продолжительныхъ фотометрическихъ наблюденіяхъ этаго рода тѣмъ обстоятельствомъ, что измѣненіе относительной величины солнечнаго свѣта будетъ *одновременнымъ* для наблюденій всѣхъ планетъ. Періодическія измѣненія въ силѣ солнечнаго свѣта, зависящія отъ появленія болѣе или менѣе значительныхъ группъ солнечныхъ пятенъ, несомнѣнны, но онѣ заключены въ предѣлы столь тѣсныя, что при настоящемъ состояніи фотометріи совершенно покрываются неточностію самыхъ сравненій. Точно также, собранныя доселѣ наблюденія не могутъ дать отвѣта на вопросъ, одинаково ли свѣтлы различныя части поверхности солнца? или можетъ быть одна половина его свѣтлѣе другой?—Опираясь только на 2-хъ наблюденіяхъ Ольберса 1801 и 1803 года относительно силы свѣта Марса и Сатурна, Проф. Зейдель приходитъ къ тому общему заключенію, что напряженіе солнечнаго свѣта *не измѣнилось чувствительно* въ промежутокъ времени отъ 1801 до 1856 года. Нельзя не пожалѣть здѣсь, что въ теченіе такого продолжительнаго періода не встрѣчается болѣе ни одного подобнаго наблюденія, которое бы могло быть сравнимо съ результатами Г-на *Зейделя;* но по этому самому тѣмъ выше надобно цѣнить заслугу послѣдняго, съ такимъ постоянствомъ и основательностію преслѣдующаго избранный имъ предметъ уже въ теченіи цѣлыхъ 16-ти лѣтъ. Фотометръ Штейнгеля бывшій до сихъ поръ можно сказать единственнымъ примѣнимымъ инструментомъ этаго рода, принесъ въ рукахъ Профессора Зейделя посильную дань наукѣ.

Я упомяну здѣсь кстати, что Профессоръ *Швертъ* въ Шпейерѣ, хорошо извѣстный ученому міру своими изслѣдованіями въ оптикѣ, уже въ 1858 году устроилъ новаго рода, весьма остроумный фотометръ, (видѣнный мною въ Августѣ того же года въ механическомъ заведеніи Эртеля въ Мюнхенѣ), который какъ по конструкціи такъ и по оптической силѣ обѣщаетъ принести новые плоды на столь слабо обработываемомъ до селѣ полѣ; но результаты первыхъ наблюденій Проф. *Шверта* еще не извѣстны ученому міру (*).

Изъ опытовъ произведенныхъ для опредѣленія относительнаго напряженія свѣтовыхъ лучей, истекающихъ изъ средины и краевъ солнечнаго диска, я упомяну только о сравненіяхъ, произведенныхъ въ послѣднее время *Шакорнакомъ*, отъ Мая до Октября 1859 года, при помощи устройства подобнаго тому, какое предложено было для этой цѣли еще Араго. Результаты, извлеченные изъ осьми сотъ сравненій (Comptes

(*) Только изъ частнаго сообщенія я знаю, что весною 1859 г. сдѣланъ былъ опытъ сравненія солнечнаго свѣта, при посредствѣ искуственно-отраженнаго изображенія, съ свѣтомъ Веги. Полученный численный результатъ весьма значительно отклоняется отъ выведеннаго Проф. Зейделемъ,

rendus XLIX. N. 21) доказываютъ, что начиная отъ центра солнечнаго диска, въ окружности до 0,3 радіуса свѣтъ можно считать постояннымъ, отсюда начинается постепенное уменьшеніе онаго къ краямъ, вблизи которыхъ, (въ угловомъ отстояніи 40″), напряженіе достигаетъ только половинной величины въ сравненіи съ центромъ. Даже обширная полутѣнь одного пятна, проходившаго вблизи средины диска показала бо́льшую степень свѣта чѣмъ край. Послѣдній представляетъ на своей границѣ (въ толстотѣ 40″) неравномѣрное распредѣленіе свѣта и желтоватое окрашиваніе, замѣтно отличающееся отъ бѣлаго свѣта центральныхъ лучей. Изъ сообщенія Г-на Шакорнака нельзя однако почерпнуть убѣжденія въ какой мѣрѣ его результаты, опирающіеся на весьма деликатныхъ сравненіяхъ, легко подверженныхъ вліянію постороннихъ обстоятельствъ, заслуживаютъ довѣрія. Авторъ обѣщаетъ дать со временемъ подробное изложеніе оныхъ въ Annales de l'Observatoire Imperiale de Paris. Между тѣмъ изслѣдованія Секки, предпринятыя съ цѣлію вывода закона лучеиспусканія теплоты солнечной поверхностію, которыя мы подробнѣе розберемъ ниже, по доказанной въ послѣднее время аналогіи въ физическомъ отношеніи лучей свѣтовыхъ и теплородныхъ, подтверждаютъ выводъ Г-на Шакорнака. Напряженіе теплородныхъ лучей вблизи солнечнаго края было найдено имъ также вдвое слабѣйшимъ напряженія лучей центральныхъ (Astronom. Nachrichten Bd. 52 и Comptes rendus T. XLIX N. 24). Кромѣ того въ опытахъ предъидущихъ лѣтъ (Nuovo Cimento V. VIII) онъ находитъ подтвержденіе того факта, что самые блестящіе факелы, появляющіеся на солнечномъ краѣ въ дѣйствительности не превосходятъ своимъ свѣтомъ центральныхъ частей солнечнаго диска. Сюда же относится замѣчаніе Швабе (Astr. Nachr. Bd. 41), что края солнца, разсматриваемаго безъ помощи цвѣтнаго стекла въ туманные дни, представляются замѣтно темнѣйшими, и подобное наблюденіе Секки, сдѣланное во время послѣдняго затмѣнія при помощи тёмнаго стекла различной густоты; равнымъ образомъ и фотографическія изображенія солнца представляютъ тому подтвержденіе.

(Продолженіе впредь).

III.

Письмо Поручика Станислава Каминскаго къ Издателю.

(С. Петерб. 1861. 11-го Марта).

Прошу Васъ помѣстить на страницахъ Математическаго Вѣстника слѣдующее, чисто геометрическое, рѣшеніе задачи предложенной Г. Штейнеромъ въ журналѣ *Nouvelles annales de Mathématiques* (Томъ XIX, Декабрь, 1860, стр. 464).

Помѣщая въ Вашемъ журналѣ это рѣшеніе, я желаю показать какъ помощью самыхъ начальныхъ истинъ высшей Геометріи можно разрѣшать геометрическія вопросы, которые представили бы, по своей сложности, аналитическому рѣшенію нѣкоторыя затрудненія. При всемъ томъ у насъ наука высшей Геометріи имѣетъ небольшое число любителей.

Заданіе.

C_1, C_2, C_3 суть три конуса *той же* степени, имѣющіе свои вершины на *одной прямой;* C_1 пересѣкаетъ C_3 по кривой *плоской*, C_2 пересѣкаетъ C_3 по кривой *плоской*, то и C_1 пересѣкаетъ C_3 по кривой *плоской*, и что эти три плоскости пройдутъ чрезъ *одну и ту же* прямую.

(*Steiner*).

Рѣшеніе. Для сокращенія будемъ представлять кривую пересѣченія коническихъ поверхностей C_1 и C_3 значкомъ $(C_1 C_3)$; кривую пересѣченія конусовъ C_2 и C_3 значкомъ $(C_2 C_3)$ а пересѣченіе C_1 и C_2 чрезъ $(C_1 C_2)$.

Такимъ образомъ намъ дано, что $(C_1 C_3)$ и $(C_2 C_3)$ суть кривыя плоскія, а требуется доказать что $(C_1 C_2)$ плоская и что плоскости ихъ пересѣкаются по одной прямой. Для этого, возьмемъ на кривой $(C_1 C_3)$ три какія нибудь точки (но нележащія на одной прямой) a, b и c, которыя вмѣстѣ съ $д$, точкою пересѣченія плоскости кривой $(C_1 C_3)$ съ прямою $C_1 C_2 C_3$, на которой лежатъ вершины данныхъ конусовъ, составятъ четыреугольникъ $a b д c$. Діагональ этого четыреугольника $a д$ пересѣкается другою діагональю $c b$ и линіей соединяющей точки пересѣченія противуположныхъ сторонъ этого четыреугольника, въ точкахъ m и f. Соединяя точки $д$, m, a, f, лежащія на одной прямой съ вершинами, коническихъ поверхностей C_1 и C_3, получимъ два пучка прямыхъ $C_1 д$, $C_1 m$, $C_1 a$, $C_1 f$ и $C_3 д$, $C_3 m$, $C_3 a$, $C_3 f$, которыхъ ангармоническое отношеніе будетъ одно и тоже (*).

Продолжая линіи, составляющія послѣдній изъ нихъ, т. е. $C_3 д$, $C_3 m$, $C_3 a$ и $C_3 f$ до пересѣченія съ плоскостью кривой $(C_2 C_3)$, получимъ новый четыреугольникъ $a' b' c' д'$, котораго вершины a', b' и c' лежатъ на линіи $(C_2 C_3)$. Діагональ этого новаго четыреугольника $a' д'$ пересѣчется діагональю его $b' c'$ и линіей соединяющей точки пересѣченія противуположныхъ сторонъ въ точкахъ m' и f'. Очевидно что m' и f' будутъ лежать на продолженіи $C_3 m$ и $C_3 f$. Теперь подобно предъидущему, соединимъ точки $д'$, m', a' и f' съ вершиною конуса C_2, то получимъ пучокъ $C_2 д'$, $C_2 m'$, $C_2 a'$ и $C_2 f'$, въ которомъ ангармоническое отношеніе равно ангармоническому отношенію первыхъ двухъ, ибо онъ пересѣкается съ пучкомъ $C_3 д$, $C_3 m$, $C_3 a$ и $C_3 f$ въ точкахъ $д'$, m', a' и f', лежащихъ на одной прямой. И такъ два пучка прямыхъ, коихъ вершины лежатъ въ C_1 и C_2, и которые мы для сокращенія будемъ обозначать такъ $C_1 (д\, m\, a\, f)$ и $C_2 (д'\, m'\, a'\, f')$, находясь въ одной и той же плоскости, имѣютъ равныя ангармоническія отношенія, и какъ направленія двухъ линій $C_1 д$ и $C_2 д'$, принадлежащихъ соотвѣтствено имъ, совпадаютъ, то слѣдуетъ что остальныя три линіи одного изъ нихъ, съ тремя остальными другаго, т. е. линіи $C_1 m$, съ $C_2 m'$, $C_1 a$ съ $C_2 a'$ и $C_1 f$ съ $C_2 f'$

(*) Смотри Traité de Geometrie superieure par. M. Chasles; или коническія сѣченія Салмона, переводъ съ англійскаго М. *Ващенко-Захарченко* (стр. 54).

пересѣкутся въ точкахъ лежащихъ на одной прямой, которыя мы назовемъ соотвѣтственно чрезъ m'', a'' и f'' (*). Назовемъ точку пересѣченія этой прямой $m''\,a''\,f''$ съ прямою $C_1\,C_2\,C_3$ чрезъ ∂''. Теперь, очевидно что, точка a'' лежитъ на кривой $(C_1\,C_2)$, ибо есть пересѣченіе линій $C_1\,a$ и $C_2\,a'$. Возьмемъ еще на кривой $(C_1\,C_2)$ точки b'' и c'', пересѣченіе прямыхъ $C_1\,b$ и $C_1\,c$ съ прямыми $C_2\,b'$ и $C_2\,c'$; то точки b'', m'' и c'' лежатъ на одной прямой; ибо линіи $C_1\,b$, $C_1\,m$ и $C_1\,c$ а также $C_2\,b'$, $C_2\,m'$ и $C_2\,c'$, которыя въ этихъ точкахъ пересѣкаются, лежатъ по три въ одной плоскости. И такъ точка m'' лежитъ на прямой $a''\,f''\,\partial''$ и на прямой $b''\,c''$, слѣдовательно эти линіи пересѣкаются и четыре точки ∂'', a'', b'' и c'' лежатъ въ одной плоскости, а послѣднія 3 изъ нихъ лежатъ также на линіи $(C_1\;C_2)$. Оставляя постоянными точки a и b на кривой $(C_1\;C_3)$ (∂ не можетъ мѣнять положенія при тѣхъ же конусахъ) и двигая точку c по кривой $(C_1\,C_3)$, очевидно a'' и b'' на кривой $(C_1\,C_2)$ а также точка ∂'' останутся неизмѣнными, а положеніе точки c'' будетъ мѣняться на кривой $(C_1\;C_2)$ и всегда будетъ въ одной плоскости съ a'', b'' и ∂''. Такимъ образомъ вся кривая $(C_1\;C_2)$ будетъ лежать въ плоскости $a''\,b''\,\partial''$.

Теперь остается доказать другую часть задачи *Штейнера* — т. е. что плоскости $(C_1\;C_2)$, $(C_1\;C_3)$ и $(C_2\;C_3)$ пересѣкаются *по одной прямой.* Линію $a\,b$ въ плоскости $(C_1\;C_3)$ можно разсматривать, какъ пересѣченіе плоскостей $C_1\,a\,b$ и $C_3\,a\,b$; линію $a'\,b'$ какъ пересѣченіе плоскости $C_2\,a'\,b'$ и $C_3\,a'\,b'$; и наконецъ $a''\,b''$ есть пересѣченіе плоскостей $C_1\;a''\,b''$ и $C_2\;a''\,b''$, или, что одно и тоже, плоскостей $C_1\,a\,b$ и $C_2\,a'\,b'$. Но какъ три плоскости $C_1\,a\,b$, $C_3\,a\,b$ и $C_2\,a'\,b'$, пересѣченія которыхъ попарно даютъ 3 линіи $a\,b$, $a'\,b'$ и $a''\,b''$, пересѣкаются въ одной точкѣ L, то и 3 вышеупомянутыя линіи пересѣкаются въ L; совершенно подобнымъ образомъ докажемъ, что линіи $a\,c$, $a'\,c'$ и $a''\,c''$ пересѣкутся въ точкѣ M, слѣдовательно и три плоскости $(C_1\;C_3)$, $(C_2\;C_3)$ и $(C_1\;C_2)$, въ которыхъ они соотвѣтственно лежатъ, пересѣкутся по прямой $L\,M$, что и требовалось доказать.

Станиславъ Каминскій.

(*) Смотри Traité de Geometrie superieure par M. Chasles (§ 43 page 31)

Извлеченія изъ періодическихъ изданій.

1. Новыя теоремы относительно первыхъ чиселъ. *Сильвестра.* (Comptes rendus T. LII N. 4 и 5).

Называя $\dfrac{r^{p-1}-1}{p}$ частнымъ *Фермата*, въ которомъ p есть модуль а r основаніе, и полагая послѣднее числомъ первымъ, остатокъ онаго въ отношеніи модуля можно выразить рядомъ дробей, знаменатели коихъ будутъ числа меньшія p, а числители числа періодическія зависящія только отъ r.

Въ самомъ дѣлѣ, если модуль есть число первое, нечетное, то знаменатели ряда дробей будутъ:

$$p-1\,,\ p-2\,,\ .\ .\ .\ 2\,,\ 1\,,$$

а числители: $1,\ 2\ .\ .\ .\ r-1,\ r,\ 1,\ 2$.

Такъ напр. для $r=5$, по этой теоремѣ, въ случаѣ когда p подходитъ подъ форму $10k+1$, будетъ:

$$\frac{5^{p-1}-1}{p} \equiv \frac{1}{p-1}+\frac{2}{p-2}+\frac{3}{p-3}+\frac{4}{p-4}+\frac{5}{p-5}+\frac{1}{p-6}+\frac{2}{p-7}+\ldots,$$

а если p формы $10k+2$, то, послику $2\times 3\equiv 1$ (*мод.* 5), будетъ:

$$\equiv \frac{3}{p-1}+\frac{4}{p-2}+\frac{5}{p-3}+\frac{1}{p-4}+\frac{2}{p-5}+\ldots$$

Для случая когда основаніе $r=2$ существуетъ рядъ

$$\frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv \frac{2}{p-3}+\frac{2}{p-4}+\frac{2}{p-7}+\frac{2}{p-8}+\frac{2}{p-11}+\ldots,$$

или $$\equiv \frac{2}{p-2}+\frac{2}{p-3}+\frac{2}{p-6}+\frac{2}{p-7}+\frac{2}{p-10}+\ldots,$$

смотря по тому будетъ ли p формы $4k+1$ или $4k-1$.

Замѣчаніе относительно чиселъ Бернулли и Эйлера.—Изъ теоремы Клаузена извѣстно, что знаменатель Бернулліева числа B_n есть произведеніе степеней составленное изъ всѣхъ такихъ простыхъ чиселъ, которые, будучи уменьшены единицею, становятся дѣлителями $2n$; но до сихъ поръ не было замѣчено, что числитель B_n содержитъ всѣ производители числа n, которые не суть степенями множителей знаменателя, такъ, что если n содержитъ p^i, но не содержитъ $p-1$, то числитель B_n будетъ содержать p^i. Отсюда, какъ слѣдствіе выходитъ, что числитель числа B_p будетъ непремѣнно содержать p, какъ скоро послѣднее есть число первое. Означая Эйлеровы числа характеристикою E, такъ что E_n будетъ выражать коефиціентъ $\dfrac{x^{2n}}{1.2..2n}$ въ разложеніи sec. x и если p есть число первое, такое, что $(p-1)\,p^i$ будетъ производитель $2n$; то, въ случаѣ когда p формы $4n+1$, p^{i+1} будетъ множителемъ въ E_n, если же p формы $4n-1$, то p^{i+1} будетъ множителемъ въ $(-1)^{n-1}.\ 2+E_n$.

Если же $p=2$, т. е. когда n содержитъ факторъ 2^i, то $E_n\equiv 1$ (*мод.* 2^{i+1}).

Изъ соединенія обѣихъ правилъ для B_n и E_n слѣдуетъ, что знаменатель въ произведеніи оныхъ не можетъ содержать множителями ни одного изъ чиселъ вида $4k+1$.

Если $2n$ и $2n'$, гдѣ n и n' числа цѣлыя отличныя отъ нуля, сравнимы по модулю $(p-1)\,p^i$, то для случая, когда p число первое и нечетное существуетъ сравненіе

$$(-1)^n\;E_n\equiv(-1)^{n'}\,E_{n'}\ (\textit{мод. } p^{i+1}),$$

а когда $p=2$, $\quad E_n\equiv E_{n'}\,(\textit{мод. } 2^i)$.

Отсюда, въ связи съ предъидущей теоремой, авторъ выводитъ замѣчательное слѣдствіе, что всѣ числа Эйлера

подходятъ подъ форму $4k+1$, между тѣмъ какъ величина, данная самимъ Эйлеромъ для E_9 содержится въ формѣ $4k-1$.

Выходя отъ 4-хъ первыхъ Эйлеровыхъ чиселъ

$$E_1 = 1\,,\; E_2 = 5\,,\; E_3 = 61\,,\; E_4 = 5 \times 277$$

можно прямо заключить, что E_9 принадлежитъ всѣмъ слѣдующимъ линейнымъ формамъ

$$5k+1\,,\; 11k+1\,,\; 13k+9\,,\; 16k+1\,,\; 17k+1\,,$$
$$7k-2\,,\; 9k-2\,,\; 19k-2$$

и однако число выведенное Эйлеромъ, 2404879661671 не подходитъ ни подъ одно изъ этихъ 8-ми условій, число же данное Рӧто, 2404879675441, удовлетворяется ими; слѣд. первое должно быть ошибочно, второе же по всей вѣроятности справедливо.

Предъидущая теорема даетъ средство узнать можетъ ли данное число p быть множителемъ въ одномъ изъ членовъ ряда E или $E \pm a$. Если это условіе существуетъ въ отношеніи 1-го ряда, то p необходимо будетъ множителемъ хотя одного изъ $\frac{p-3}{2}$ первыхъ членовъ этаго ряда; для 2-го же ряда — одного изъ $\frac{p-1}{2}$ перв. членовъ. Такимъ образомъ разсмотрѣніе 4-хъ вышеприведенныхъ чиселъ Эйлера приводитъ къ заключенію, что ни одинъ изъ членовъ безконечнаго ряда E не дѣлится на 3, 7 и 11. *Г.*

2. *Краткія извѣстія.*

(Poggendorff's Annalen B. CXII s. 156).

Гассіо пропустилъ гальваническій токъ чрезъ разрѣженное пространство въ трубкѣ, подобной Гейслеровой, отъ трехъ различныхъ батарей: водной, состоящей изъ 3520 паръ, Даніелевой — 512 элементовъ Грове—400 элементовъ, и отъ каждой получилъ въ трубкѣ свѣтъ, подобный свѣту индукціоннаго тока; то есть накаливаніе на отрицательномъ полюсѣ, и прерывную свѣтовую дугу, исходящую отъ положительнаго полюса.

— *тамъ же. стр.* 153. *А. Вейссъ* нашелъ, что темныя линіи спектра, полученнаго отъ прохожденія солнечнаго свѣта чрезъ газы азотистой кислоты и хлорофила (chlorophyll), перемѣщаются съ измѣненіемъ упругости; а именно, съ увеличеніемъ упругости (сгущенія) уменьшается разстояніе между линіями. Это уменьшеніе разстоянія *одностороннее*, потому что въ тоже самое время увеличиватся ширина линій.

Задачи предлагаемыя на разрѣшеніе.

1) Доказать что содержаніе безконечныхъ рядовъ производителей:

$$\frac{(2+a_1)(2^2+a_2)(2^3+a_3)\,.\,.\,.\,.\,.\,(2^n+a_n)\,.\,.\,.}{2^2\,.\,2^3\,.\,2^4\,.\,.\,.\,.\,2^n\,.\,.\,.\,(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\,.\,.\,.\,(1+a_n)\,.\,.\,.}$$

гдѣ: $\qquad a_n = \dfrac{a^2_{n-1}}{4\,(1+a_{n-1})}$

есть трансцендентное выраженіе:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{1+a_1}}\,.$$

2) Показать что всякая непрерывная функція $F(x)$ удовлетворяетъ выраженію:

$$\int_0^\infty\Big[e^{-by}\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{[b\,F(b)]^{(i)}}{y^i}-e^{-ay}\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{[a\,F(a)]^{(i)}}{y^i}\Big]\frac{dy}{y}=\int_b^a F(x)dx$$

гдѣ: $\qquad [b\,F(b)]^{(i)} = \dfrac{d^i\,(b\,F(b))}{db^i}$

и $\qquad [a\,F(a)]^{(i)} = \dfrac{d^i\,(a\,F(a))}{da^i}$.

3) Доказать выраженія:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4y^2}}\operatorname{Cos} by^2\,dy=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}\Big\{\operatorname{Cos} c\sqrt{\frac{b}{2}}-\operatorname{Sin} c\sqrt{\frac{b}{2}}\Big\}e^{-c\sqrt{\frac{b}{2}}}$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4y^2}}\operatorname{Sin} by^2\,dy=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}\Big\{\operatorname{Cos} c\sqrt{\frac{b}{2}}+\operatorname{Sin} c\sqrt{\frac{b}{2}}\Big\}e^{-c\sqrt{\frac{b}{2}}}$$

гдѣ π есть отношеніе окружности къ діаметру.

4) Найти значенія конечныхъ суммъ:

$$\sum_{i=0}^{i=k}\frac{\Gamma(k+i)}{\Gamma(k)\,\Gamma(i+1)}=\frac{2^{2k-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=k}\frac{\Gamma(k-(i+2))\,\Gamma(k+i-1)}{\Gamma(i+1)\,\Gamma(k)\,\Gamma(k-2)}=\frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(k-\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)}-1\,,$$

гдѣ: $\qquad \Gamma(n+1) = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,.\,.\,.\,.\,n$

5. Доказать справедливость ряда:

$$pn^{n-1}-(p-q)\,.\,\frac{n}{1}(n-1)^{n-1}+(p-2q)\,.\,\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-2)^{n-1}-(p-3q)\,.\,\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(n-3)^{n-1}+\,.\,.\,.\,.=q\,.\,\Gamma(n+1)\,,$$

гдѣ p и q совершенно произвольныя величины.

Печатать позволяется Вильно 31 Марта 1861 года. *Ценсоръ Статскій Совѣтникъ и Кавалеръ А. Мухинъ.*

ВИЛЬНО Типографія А. Марциновскаго. Редакторъ-Издатель *М. Гусевъ.*